

Mittelwertfolgen — oder: Mitten inmitten von Mitten

von Horst Hischer

Es gibt nicht nur eine große Vielzahl praktisch wichtiger bzw. nützlicher Mittelwerte und Mitten¹ und darüber hinaus sogar beliebig viele spielerisch und theoretisch konstruierbare Mittelwerte bzw. Mittelwertfunktionen², sondern mit Hilfe von Mittelwerten bzw. Mitten können neue Mittelwerte bzw. Mitten auch *algorithmisch* konstruiert werden, was uns hier zu *Mittelwertfolgen* bzw. *Mittenfolgen* führt.

1 Farey-Folgen und Ford-Kreise

1816 beschrieb der britische Geologe **John Farey** (1766 – 1826) in der Zeitschrift “Philosophical Magazine“ in einem Brief mit dem Titel “On a curious property of vulgar fractions“ exemplarisch die später nach ihm benannten „Farey-Folgen“ (englisch: “Farey series“). Für beliebiges $n \in \mathbb{N}^*$ könnte man die *Farey-Brüche der Ordnung n* durch

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}^* \wedge 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \wedge b \leq n \right\}$$

zu fassen versuchen. Da uns aber hier nur vollständig gekürzte Brüche interessieren – der Größe nach in aufsteigender Reihenfolge notiert – würden wir z. B. für $n=5$

$$\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

erhalten. Die Mengenschreibweise ist damit für dieses Unterfangen ungeeignet, weil es bei ihr ja *nicht* auf die Reihenfolge der Elemente ankommt und weil anstelle der gekürzten Brüche gleichwertig auch ungekürzte notiert werden könnten! Da nun eine *endliche Folge aus k Gliedern* als (geordnetes!) k -Tupel aufgefasst werden kann, symbolisieren wir obige (geordnete!) Farey-Folge der Ordnung 5 wie üblich besser durch

$$\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right), \text{ bezeichnet mit } \mathcal{F}_5.$$

In einem Schritt der Verallgemeinerung modifizieren wir obige beschreibende Mengendarstellung analog zwecks Darstellung von k -Tupeln wie folgt für beliebiges $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{F}_n := \left(\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}^* \wedge 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \wedge b \leq n \right), \text{ genannt „Farey-Folge der Ordnung } n\text{“}.$$

Und diese Schreibweise gestalten wir durch die *zusätzliche Verabredung* eindeutig, dass die Glieder dieses k -Tupels (also dieser endlichen Folge) erstens der Größe nach in aufsteigender Reihenfolge und zweitens vollständig gekürzt notiert werden, wobei wir in diesem Rahmen über die Gliederanzahl k keine Aussage treffen. Die Glieder einer speziellen Farey-Folge nennen wir auch *Farey-Brüche*. Das *Chuquet-Mittel* $(a+c)/(b+d)$ von zwei (als Repräsentanten gedachten!) vollständig gekürzten Brüchen $a/b, c/d$ heißt in der Zahlentheorie „Mediante“, und man kann zu folgenden *Vermutungen* gelangen:

- Jedes Glied (bis auf das erste und das letzte) ist die *Mediante* der beiden Nachbarn!
- Für benachbarte Farey-Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ gilt stets: $|a'b - b'a| = 1$.

C. Haros hatte bereits 1802 diese Vermutungen bewiesen, während Farey sie später (unabhängig von Haros) nur entdeckt hatte und Cauchy dann Fareys Vermutungen bewies.³ Lester Randolph Ford jr., ehemals Herausgeber des *American Mathematical Monthly*, publizierte 1938 eine Visualisierung der Farey-Folgen durch eine endliche Folge von Kreisen, die seitdem „**Ford-Kreise**“ heißen:⁴ Hierbei wird jeder (vollständig gekürzte!) Farey-Bruch $\frac{a}{b}$ durch einen Kreis um den Punkt $(\frac{a}{b}, 1/(2b^2))$ mit dem Radius $1/(2b^2)$ dargestellt. Schnell entdeckt man:⁵

- Alle Ford-Kreise einer Farey-Folge „liegen“ spiegelsymmetrisch auf der Rechtsachse.
- Die Ford-Kreise je zweier benachbarter Farey-Brüche berühren sich!
- Je zwei Ford-Kreise einer Farey-Folge haben höchstens einen gemeinsamen Punkt – es gibt keine Überlappungen!

Abb. 1 zeigt die elf Glieder von \mathcal{F}_5 der Reihe nach von links nach rechts in abwechselnden Graustufen (hell/dunkel). Da jeder Ford-Kreis einen Farey-Bruch visualisiert und jeder Farey-Bruch (bis auf die „Randbrüche“) die Mediante (also ein Mittelwert) seiner beiden Nachbarn ist, werden hier *geometrische Mitten visualisiert*:

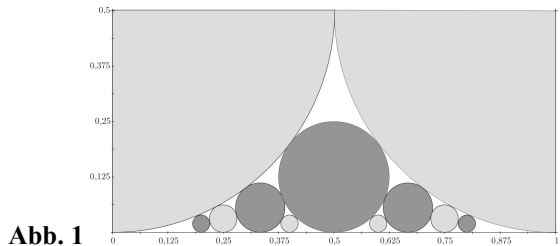


Abb. 1

- Jeder Ford-Kreis (bis auf die beiden „Randkreise“) ist eine „Mitte“ zwischen seinen beiden „andersfarbigen“ Nachbarn.

Farey-Folgen sind Beispiele für *endliche Mittelwertfolgen*, und Ford-Kreise sind Beispiele für *endliche Mittenfolgen*. Zu Farey-Folgen und Ford-Kreisen gibt es mittlerweile viele Publikationen, und man kennt z. B. auch *Ford-Kugeln* und *Ford-Dreiecke*.⁶

Jahrgang 5 bzw. 6

Beim Thema „Bruchrechnung“ ist folgende „übliche“ Aufgabe denkbar:

- *Schreibe alle Brüche auf, deren Nenner höchstens 4 ist und deren Zähler nicht größer als der Nenner ist. Ordne diese Brüche dann der Größe nach.*

Sofern die 0 als Zähler und das Kürzen/Erweitern bekannt sind, ergibt sich die Kette:

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \frac{2}{4} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$$

Durch Beschränkung auf vollständig gekürzte Brüche können wir das knapper notieren:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1}$$

- *Wie ändert sich das Ergebnis, wenn wir „höchstens 4“ durch „höchstens 3“ ersetzen?*

Das lösen wir durch Wegstreichen, und so erhalten wir aus der *4er-Kette* die *3er-Kette*:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1}$$

Natürlich kommen wir dann auch noch schnell zur *2er-Kette*: $\frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$

Nun drehen wir das „Spiel“ um und fragen:

- *Wie kommen wir von der 2er-Kette zur 3er-Kette?*

Wir müssen die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ einfügen. Aber wo? $\frac{1}{3}$ zwischen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{2}$, und $\frac{2}{3}$ zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{1}$. Und hier springt ins Auge, dass $\frac{1}{3} = \frac{0+1}{1+2}$ und $\frac{2}{3} = \frac{1+1}{2+1}$ ist.

- *Und wie kommen wir von der 3er-Kette zur 4er-Kette?*

Hier müssen die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ eingefügt werden, und zwar $\frac{1}{4}$ zwischen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{4}$ zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{1}$, und ganz entsprechend gilt $\frac{1}{4} = \frac{0+1}{1+3}$ und $\frac{3}{4} = \frac{2+1}{3+1}$!

○ Ist es auch möglich, entsprechend von der 4er-Kette zur 5er-Kette zu kommen?

Leider kennen wir die 5er-Kette noch nicht! Aber wir versuchen es genauso wie bei den bisherigen Beispielen und erhalten so zunächst mit $\frac{0+1}{1+4} = \frac{1}{5}$ und $\frac{3+1}{4+1} = \frac{4}{5}$:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$$

Berücksichtigen wir die „Definition“ der 5er-Kette, so fehlen hier nur noch die Brüche $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$, was zu $\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$ führt, und zu unserer Überraschung gilt hier entsprechend $\frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2}$ und $\frac{3}{5} = \frac{1+2}{2+3}$!

Nun könnten wir ja auf die Idee kommen, beispielsweise von der 4er-Kette dadurch zur nächst höheren „aufzusteigen“, dass wir zwischen allen „Nachbarbrüchen“ der 4er-Kette, die etwa mit a/b und c/d bezeichnet seien, einen „Zwischenbruch“ nach dem Prinzip $(a+c)/(b+d)$ zu bilden versuchen. Das würde dann aber weitere, bisher noch nicht vorkommende Brüche liefern, nämlich hier $2/7$ und $5/7$, die aber definitorisch nicht zur 5er-Kette gehören. Dennoch „passen“ diese Brüche gemäß ihrer Konstruktion zwischen „ihre“ erzeugenden Brüche, was doch erstaunlich ist, so dass wir einen „Auschnitt“ aus der noch nicht berechneten 7er-Kette erhalten:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$$

○ Gilt denn für beliebige Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, dass $\frac{a+c}{b+d}$ stets dazwischen liegt?

Wie wir es auch anstellen, es klappt bei allen Beispielen! Für den Jahrgang 5 bzw. 6 sollte man es bei dieser Einsicht belassen, und in Jahrgang 8 bzw. 9 kann (und sollte!) man diese Vermutung dann auch beweisen! ⁷ Der historischen Wahrheit wegen sollte man irgendwann mitteilen, dass diese Ketten „Farey-Folgen (der Ordnung n)“ heißen.

(Wie) lässt sich mit solchen Farey-Folgen (weiter) spielen?

○ Bilde die Differenzen der Nachbarbrüche einer Farey-Folge. Was fällt Dir auf?

So ergeben sich exemplarisch bei der Ordnung 4 folgende Differenzen: $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}$.

Hier fällt einerseits (erneut!) der spiegelsymmetrische Aufbau auf und andererseits die Tatsache, dass alle Zähler den Wert 1 haben, wobei die Nenner immer das Produkt der Nachbarnenner der generierenden Brüche sind. Wir haben damit spielerisch entdeckt:

• Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ Nachbarbrüche in einer Farey-Folge mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so gilt $bc - ad = 1$.

Jahrgang 8 bzw. 9

Hier können wir nun den „Spieß umdrehen“ und zu einem gegebenen Bruch einer Farey-Folge „den“ größeren Nachbarn konstruieren, indem wir $bc - ad = 1$ auflösen:

$$c = \frac{ad + 1}{b} \quad (*)$$

Wir starten in (*) mit $d = 1$ und erhöhen d sukzessive um 1, bis erstmals der Bruch ganzzahlig ist. Wenn wir z. B. von $1/2$ ausgehen (genauer: von $a = 1$ und $b = 2$), erhalten wir $c = 1$ und $d = 1$, also in der Tat $1/1$ als größeren Nachbarn. Aber hoppla: Das stimmt doch nur in der 2er-Kette! In der 3er-Kette wäre doch $2/3$ der gesuchte Nachbar, ebenso in der 4er-Kette, und in der 5er-Kette wäre es gar $3/5$! Was haben wir falsch gemacht? Falsch gedacht! Denn die *diophantische Gleichung* (*) ist gar nicht eindeutig lösbar – wir sind leider nur so weit gegangen, bis *erstmalig* der Bruch *ganzzahlig* war!

Würden wir jedoch fortfahren, so erhielten wir: $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \dots$

Hier sehen wir die *Vieldeutigkeit* des Chuquet-Mittels bzw. der Medianten: In unseren Betrachtungen lag versteckt ein Übergang von der Interpretation eines Bruchs als *einem* Repräsentant einer Äquivalenzklasse zur Interpretation als *der* Äquivalenzklasse selbst! ⁸

Auf höherem Niveau lässt sich eine *iterative Konstruktion* von Farey-Folgen beschreiben: (1) *Iterationsbeginn* mit $0/1$ und $1/1$, d. h.: $\mathcal{F}_1 = (0/1, 1/1)$; (2) *Iterations-schritt* von \mathcal{F}_n nach \mathcal{F}_{n+1} : Es werden alle Medianten zwischen „Nachbarn“ in \mathcal{F}_n hinzugefügt, die der Bedingung genügen, dass der neue Nenner kleiner oder gleich $n+1$ ist.

Neue Möglichkeiten durch Neue Medien

Im Jahrgang 8 bzw. 9 kann man nun spielerisch eine Visualisierung der Farey-Folgen durch Ford-Kreise anpacken, etwa durch folgende Aufgabe:

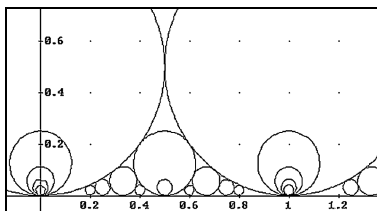
- *Zeichne zu jedem Farey-Bruch $\frac{a}{b}$ der Farey-Folge der Ordnung 4 einen Kreis um den Mittelpunkt $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$ mit dem Radius $\frac{1}{2b^2}$.*

Ein zeitgemäßes Werkzeug für die altersgemäße und intelligente Bearbeitung dieser Aufgabe ist ein Dynamisches Geometriesystem, das auch über die Möglichkeit der Termeingabe für Koordinaten und Radien verfügt, etwa EUKLID DYNAGEO (herunterladbar unter <http://dynageo.de>). So wurde auch Abb. 1 erzeugt. Die Schülerinnen und Schüler sollten nicht unbedingt angehalten werden, diese Aufgabe mittels Makros zu lösen, weil es eine gute Konzentrationsübung ist, der Reihe nach und systematisch die sieben Mittelpunkte und dann jeweils die Kreise um diese Mittelpunkte mit dem entsprechenden Radius einzugeben. Das Ergebnis ist dann allemal beeindruckend. Dabei empfiehlt es sich, das Koordinatensystem sichtbar zu machen und den Bildschirmausschnitt so weit zu vergrößern, dass das Intervall $[0; 1]$ der x -Achse gerade noch auf dem Bildschirm sichtbar ist. Beeindruckend ist dann auch der nächste Schritt:

- *Erweitere Deine Konstruktion, indem Du zur Farey-Folge der Ordnung 5 übergehst!*

Das kann in noch überschaubarer Weise um einige Schritte fortgesetzt werden. ⁹

Sofern die Kreisgleichung schon bekannt ist, kommt auch eine darstellerische Variante mit einem Funktionenplotter in Frage, der die Darstellung impliziter Funktionen ermöglicht. Beispielsweise ist der Funktionenplottermodul von DERIVATE™ hierfür geeignet, zumal man mit dem Befehl „Vektor“ auch Kurvenscharen plotten kann. Wählt man nun in $(a/b, 1/(2b^2))$ z. B. $a \in \{0, 1, \dots, 5\}$ und $b \in \{1, 2, \dots, 5\}$, so erhält man die Abb. 2, welche uns Anlass zu neuen Untersuchungen liefert:



- *Was bedeuten die zusätzlichen Kreise?* **Abb. 2**

2 Die babylonische Quadratwurzelapproximation ¹⁰

Der Geschichtsschreiber Jamblichus von Chalkis (ca. 250 – 330 n. Chr.) berichtet, dass Pythagoras von einem Aufenthalt in Mesopotamien (bzw. *Babylonien*, dem Gebiet des heutigen Irak) die *Kenntnis der drei klassischen Mittelwerte* und der *musikalischen Proportion* mitgebracht habe. Aufgrund von dort gefundenen Keilschrifttafeln wissen wir, dass den Babyloniern bereits vor fast 4000 Jahren sowohl der Satz des Pythagoras als

auch diese drei Mittelwerte bekannt waren, und zwar (in heutiger Notation): das arithmetische Mittel $A(x, y)$, das geometrische Mittel $G(x, y)$ und das harmonische Mittel $H(x, y)$, wobei x und y als *positive rationale* oder *reelle Zahlen* zu denken sind. Die **musikalische Proportion** beschreibt den wichtigen Zusammenhang zwischen diesen Mittelwerten:

$$\frac{x}{A(x, y)} = \frac{H(x, y)}{y} \quad \text{bzw. äquivalent: } A(x, y) \cdot H(x, y) = xy = (G(x, y))^2$$

Die berühmte Keilschrifttafel **Yale YBC 7289** der babylonischen Sammlung an der Universität von Yale (*Yale Babylonian Collection*) weist auf diesen Sachverhalt hin. Sie wurde um 1912 herum gefunden und stammt vermutlich aus der Zeit zwischen 1800 und 1600 v. Chr. (Abb. 3¹¹). Yale YBC 7289 visualisiert eine Approximation von $\sqrt{2}$, wohl basierend auf einem Algorithmus, der die **babylonische Ungleichungskette** ausnutzt:

$$x < y \Rightarrow x < H(x, y) < G(x, y) < A(x, y) < y$$



Die hier enthaltenen Ungleichungen $H(x, y) < G(x, y)$ und $G(x, y) < A(x, y)$ sind beide äquivalent zu $(x - y)^2 > 0$, und die Ungleichungen $x < H(x, y)$ und $A(x, y) < y$ sind jeweils zu $x < y$ äquivalent! – Neben diesem „modernen“ formalen Beweis gibt es einen historischen, auf Pappus von Alexandria (ca. 250 – ca. 350 n. Chr.) zurückgehenden, bei dem dieser sich auf die Visualisierung in Abb. 4 bezieht, die von einem „unbekannten Geometer“¹² stammt:

Abb. 3

© Bill Casselmann, University of British Columbia, Canada

Die Längenangabe $A(x, y)$ ist trivial, und die Längenangaben $G(x, y)$ bzw. $H(x, y)$ ergeben sich aus dem Höhensatz bzw. dem Kathetensatz des Euklid. Die Gültigkeit der Ungleichungskette $x < y \Rightarrow x < H(x, y) < G(x, y) < A(x, y) < y$ folgt unmittelbar aus der Zeichnung.

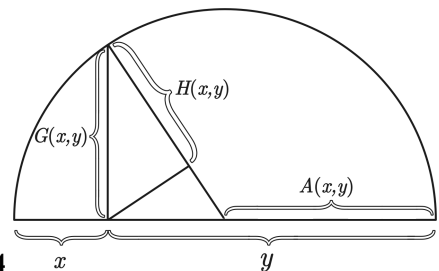


Abb. 4

Möglicherweise ist $x < H(x, y)$ nicht auf Anhieb zu sehen, aber so geht es z. B.: Wir denken uns einen Kreis um den Halbkreismitelpunkt mit dem Radius $A(x, y) - x$!

Es sei nun $a, x, y \in \mathbb{R}_+$ gegeben mit $a = xy$ und $x < y$, dann gilt:

$$x < H(x, y) < G(x, y) < A(x, y) < y \tag{1}$$

Also: Aus einer „Einschachtelung“ $x < \sqrt{a} < y$ erhalten wir eine neue, bessere mit Hilfe des harmonischen und des arithmetischen Mittels gemäß $H(x, y) < \sqrt{a} < A(x, y)$, während das geometrische Mittel $G(x, y)$ „stabil“, d. h. unverändert, bleibt, nämlich

$$G(x, y) = G(H(x, y), A(x, y)) = \sqrt{a}.$$

Wegen

$$0 < A(x, y) - H(x, y) < A(x, y) - x = \frac{1}{2}(y - x)$$

liefert (1) eine **Intervallschachtelung** zur Approximation von \sqrt{a} , wobei sich ein Algorithmusstart stets durch $x := a$ und $y := 1$ (für $a < 1$) bzw. $x := 1$ und $y := a$ (für $a > 1$) realisieren lässt. Notieren wir diesen Prozess in Folgeschreibweise für zwei rekursiv definierte Folgen $\langle x_n \rangle$ und $\langle y_n \rangle$ mit den Startwerten $x_0 := x$ und $y_0 := y$ gemäß

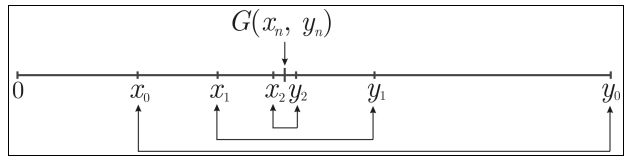
$$x_{n+1} := H(x_n, y_n) \text{ und } y_{n+1} := A(x_n, y_n), \quad (2)$$

so folgt aus $0 < A(x, y) - H(x, y) < \frac{1}{2}(y - x)$ mittels vollständiger Induktion:

$$0 < y_n - x_n < \frac{y_0 - x_0}{2^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Der babylonische Algorithmus *konvergiert* also! Zur Begründung wurden sowohl die *babylonische Ungleichungskette* als

Abb. 5



auch die *musikalische* Proportion herangezogen. Das geometrische Mittel wird hierbei zwar nicht wirklich benötigt, wohl aber zeigt es uns für jedes n das zu approximierende *Zentrum* der Intervallschachtelung (Abb. 5), welches übrigens *eine weitere Mitte* ist!

In (2) begegnen uns zwei miteinander verschränkte bzw. verschachtelte *Mittelwertfolgen*: Jedes Glied (vom zweiten an) in jeder der beiden Folgen ist Mittelwert der entsprechenden Vorgänger in beiden Folgen, wobei für die eine Folge das arithmetische Mittel und für die andere Folge das harmonische Mittel benutzt wird. Wegen $G(x_n, y_n) = \sqrt{a}$ ist $x_n y_n = a$, und so lässt sich (2) in bekannter Weise *entschachteln*:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{a}{y_n} \right) \quad (3)$$

Der in dieser Form *entschachtelte babylonische Algorithmus* wird oft nach Heron von Alexandria (ca. 10 – ca. 75 n. Chr.) benannt, z. T. auch nach Newton. Auch dies ist eine *Mittelwertfolge*, denn jedes Glied vom zweiten an ist das arithmetische Mittel von ...¹³

Jahrgang 8 bzw. 9

Hieraus ergeben sich nun Anregungen für den Unterricht im Jahrgang 8 bzw. 9:¹⁴ Als Ausgangspunkt wählen wir die Keilschrifttafel Yale YBC 7289 (Abb. 3; weitere Abbildungen findet man z. B. im Internet). Hier fällt die *Keilschrift* auf, über die Informationen eingeholt werden (Bibliothek, Internet), und man findet sowohl Abbildungen der *Transkription* (Abb. 6) als auch der *Transliteration* (Abb. 7), so dass nun die Frage entsteht, welche Bedeutung die „Zahlen“ haben, die jeweils an einer Quadratseite und an einer Diagonalen zu sehen sind.¹⁵ Diese Frage führt zu der Entdeckung, dass an der Diagonalen folgende Angaben stehen (was bedeuten hier also die Zeichen \triangleleft und ∇ ?):

$$\text{oberhalb: } 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}, \text{ unterhalb: } 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$$

Der erste Wert ergibt sich in dezimaler Näherung z. B. zu $1,414212_9 \approx 1,414213$, was an $\sqrt{2} \approx 1,414213_5$ erinnert, und der zweite ist ungefähr das $\sqrt{2}$ -fache der Kantenlänge 30, was also zu folgender Deutung Anlass gibt:

Die Babylonier wollten vermutlich mit dieser Tafel ausdrücken, dass die Diagonallänge eines Quadrats das $\sqrt{2}$ -fache der Kantenlänge ist, und sie haben dies an einem Beispiel konkretisiert.

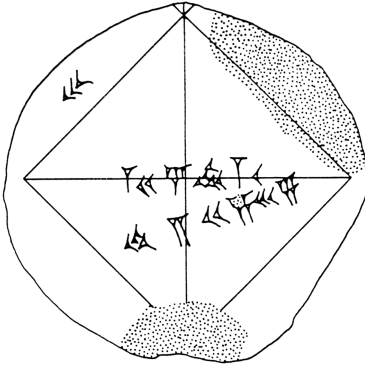


Abb. 6

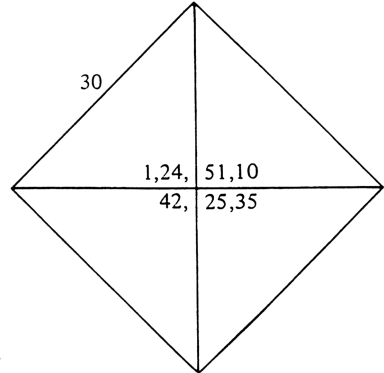


Abb. 7

Das wirft die nächste Frage auf, wie damals ohne Taschenrechner bzw. Computer solch hervorragende Näherungswerte möglich waren! Diese Frage ist nun Anlass, auf die drei klassischen Mittelwerte und die *musikalische Proportion* einzugehen, über Abb. 4 elementargeometrische Eigenschaften zu wiederholen und damit die *babylonische Ungleichungskette* zu entdecken und zu beweisen, was schließlich zur Erarbeitung der *Intervallschachtelung* in Abb. 5 und damit zu einer nachträglichen Deutung der Entstehung von Abb. 3 führt.

Die (elementaren!) Rechenschritte werden im Folgenden dargestellt, und zwar hier nur (wie bei den Babyloniern) für $\sqrt{2}$. Beginnen wir mit $x_0 := 1$ und $y_0 := 2$, so folgt:

$$x_1 = H(1, 2) = \frac{4}{3} = 1 + \frac{20}{60},$$

$$y_1 = A(1, 2) = \frac{3}{2} = 1 + \frac{30}{60}$$

$$x_2 = H(x_1, y_1) = \frac{24}{17},$$

$$y_2 = A(x_1, y_1) = \frac{17}{12} = 1 + \frac{25}{60} = 1,41\bar{6}$$

Spätestens hier ist zu erwähnen, dass es weitere archäologische Quellen gibt, die auch y_2 als Näherungswert für $\sqrt{2}$ nennen! Also ist „unser“ Verfahren doch recht erfolgreich!

$$x_3 = H(x_2, y_2) = \frac{816}{577} \approx 1,414211_4, \quad y_3 = A(x_2, y_2) = \frac{577}{408} \approx 1,414215_6$$

Während dieser Algorithmus also bereits im zweiten Durchlauf mit dem arithmetischen Mittel den babylonischen Näherungswert y_2 liefert, schachteln die Werte im dritten Durchlauf den auf der Keilschrifttafel Yale YBC 7289 vorliegenden Wert somit lediglich ein. Wir machen daher weiter und führen auch noch den vierten Durchlauf durch:

$$x_4 = H(x_3, y_3) = \frac{941664}{665857} \approx 1,414213_5, \quad y_4 = A(x_3, y_3) = \frac{665857}{470832} \approx 1,414213_5$$

Nunmehr stimmen diese beiden Werte in der angegebenen Stellenzahl bereits exakt mit $\sqrt{2}$ überein, und dieser Wert ist kleiner als der „zweite“ babylonische Wert (in Abb. 7)!

Wir schließen daraus, dass die Babylonier diesen vierten Schritt vermutlich nicht mehr vollzogen haben. Daher gehen wir nochmals zum dritten Schritt zurück und entwickeln die beiden dort angegebenen Brüche in *Sexagesimalbruchreihen*:

$$x_3 = \frac{816}{577} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{9}{60^3} + \frac{40}{60^4} + \frac{14}{60^5} + \dots$$

$$y_3 = \frac{577}{408} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \frac{35}{60^4} + \frac{17}{60^5} + \dots$$

(Diese Entwicklungen können übrigens nicht abbrechen, denn 408 enthält den Primfaktor 17, und 577 ist Primzahl.)

Runden wir diese beiden Werte nach unseren üblichen Rundungsregeln jeweils nach dem vierten Summanden, so erhalten wir ungefähr den babylonischen Näherungswert:

$$x_3 = \frac{816}{577} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}, \quad y_3 = \frac{577}{408} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{11}{60^3}$$

Es ist also denkbar, dass die Babylonier ihren Algorithmus nur zweimal voll durchlaufen haben und im dritten Schritt nur noch das arithmetische Mittel von x_2 und y_2 berechnet haben, nämlich y_3 , und zwar nur bis einschließlich zur „dritten Nachkommastelle“ und durch „Abschneiden“, was beim Nenner 60^3 immerhin ein beeindruckender Aufwand ist.

- Insgesamt: Hut ab vor dieser Rechenleistung der Babylonier ohne Neue Medien!

3 Der Kreis als harmonisch-geometrisches Mittel

Der schottische Mathematiker **James Gregory** (1638 bis 1675) veröffentlichte 1667 in seinem Buch über Quadraturfragen („Vera circuli et hyperbolae quadratura“) einen bedeutsamen Algorithmus zur Approximation von π , der merkwürdigerweise im bisherigen Mathematikunterricht noch nicht die ihm gebührende bzw. mögliche Rolle spielt.¹⁶

Gregory betrachtet wie Archimedes regelmäßige n -Ecke (und zwar verallgemeinert an Kegelschnitten!), die er wie Archimedes durch *systematische Eckenanzahlverdopplung* verfeinert, wobei er allerdings nicht die Umfänge der ein- und umbeschriebenen n -Ecke benutzt, sondern deren Flächeninhalte. Da sein Algorithmus in nur geringfügiger Modifikation auch auf die *Umfänge* anwendbar ist und er dann in dieser Form elementar ableitbar ist, soll hier dieser Weg dargestellt werden, und zwar speziell nur für Kreise:

Wir starten wie üblich entweder mit $n = 3$ (regelmäßiges Dreieck) oder mit $n = 4$ (Quadrat), und der Iterationsschritt geht also von n nach $2n$. Den *Umfang* des einbeschriebenen n -Ecks bezeichnen wir mit E_n und den des umbeschriebenen mit U_n . Bezeichnen wir dann die Seitenlänge des einbeschriebenen bzw. des umbeschriebenen n -Ecks mit e_n bzw. mit u_n , so gilt $E_n = n \cdot e_n$ bzw. $U_n = n \cdot u_n$. Per Konstruktion ist $E_n < U_n$. Abb. 8 visualisiert mit diesen Bezeichnungen den ersten Iterationsschritt mit dem Startwert $n = 4$.

Aufgrund von Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen jeweils zwei Dreiecken gilt nun

$$\frac{e_n}{\frac{1}{2} u_n} = \frac{u_{2n}}{\frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} u_{2n}} \quad \text{und} \quad \frac{e_n}{e_{2n}} = \frac{e_{2n}}{\frac{1}{2} u_{2n}},$$

und hieraus folgt

$$u_{2n} = \frac{e_n \cdot u_n}{e_n + u_n} \quad \text{und} \quad e_{2n}^2 = \frac{1}{2} e_n \cdot u_{2n}.$$

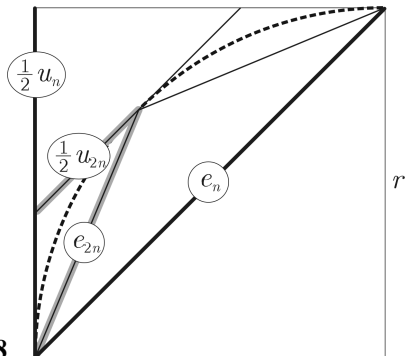


Abb. 8

Mit $E_n = n \cdot e_n$ und $U_n = n \cdot u_n$ ergeben sich schließlich die entscheidenden Beziehungen

$$U_{2n} = H(E_n, U_n) \text{ und } E_{2n} = G(E_n, U_{2n}).^{17}$$

Hier liegen somit zwei *Mittelwertfolgen* vor, die mit Hilfe des geometrischen und des harmonischen Mittels *verschachtelt rekursiv definiert* sind. Und diese beiden Folgen bilden eine Intervallschachtelung für den Kreisumfang.

Beweis: Zunächst gilt $E_n < U_n$ für alle n aufgrund der Konstruktion der Folgen. Mit Hilfe der babylonischen Ungleichungskette (siehe Abschnitt 2) folgt weiter

$$E_n < H(E_n, U_n) = U_{2n} < A(E_n, U_n) < U_n,$$

und aus $U_{2n} < U_n$ ergibt sich

$$E_n < G(E_n, U_{2n}) = E_{2n} < U_{2n} < U_n.$$

Beide Ungleichungsketten führen zu

$$E_n < E_{2n} < U_{2n} < \frac{E_n + U_n}{2} < U_n \text{ und schließlich zu } 0 < U_{2n} - E_{2n} < \frac{U_n - E_n}{2}.$$

Die bisherige Argumentation hat leider noch den Schönheitsfehler, dass Abb. 8 nur eine Darstellung für $n = 4$ ist, dass aber die Gedankengänge dennoch mit ihrer Hilfe für beliebiges n geführt wurden. Diese Vorgehensweise wird nun nachträglich mit Hilfe von Abb. 9 gerechtfertigt: An ihr wird sofort klar, dass die benutzten Ähnlichkeitsbeziehungen stets unabhängig vom unten rechts zu sehenden „Öffnungswinkel“ des jeweils aktuellen Segments gelten!

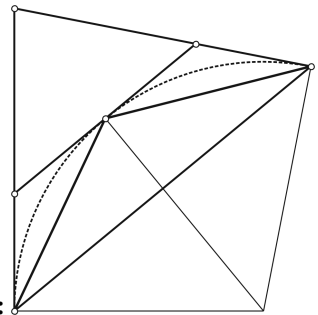


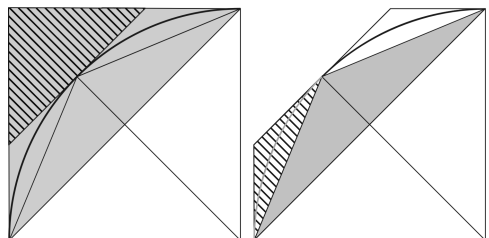
Abb. 9:

Für den Gregory-Algorithmus werden – im Gegensatz zum archimedischen Algorithmus – keine Quadratwurzeln und keine aufwändigen Termumformungen benötigt, sondern es genügen etwas Geometrie und die Kenntnis des harmonischen und des arithmetischen Mittels: Zunächst gilt per Konstruktion $E_n < U_n$ für alle n . Nun geht es nur noch darum, die Rekursionsbeziehungen zu entdecken. Dazu dient Abb. 10:

In jeder dieser beiden Teilfiguren tritt jeweils ein Paar ähnlicher Dreiecke auf (schraffiert bzw. geschummert), und die Ähnlichkeit der Dreieckspaare ist mit elementargeometrischen Mitteln von Jahrgang 8 erkennbar! Für eine *klassische Demonstration* ist es hilfreich, die Grundfiguren in Abb.

10 jeweils als Schwarz-Weiß-Zeichnungen auf Folien für den Overheadprojektor vorzubereiten, dazu die Dreiecke in farbigen Folien auszuschneiden und dann diese farbigen Dreiecke richtig „auslegen“ zu lassen. Übereinanderlegen macht ihre Ähnlichkeit auch „begreifbar“,

Abb. 10:



die dann noch argumentativ zu rechtfertigen ist.¹⁸

Da sich aufgrund des Gregory-Algorithmus der Kreis(-Umfang) als gemeinsamer Grenzwert zweier mit Hilfe des harmonischen und des geometrischen Mittels rekursiv definierten Folgen ergibt, heißt der Kreis auch „**harmonisch-geometrisches Mittel**“.

4 Allgemeine Mittelwertfolgen — offene Fragen

Üblich ist (in Hochschule und – falls dort überhaupt – in der Schule) folgender Weg:

Ist $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge, so lässt sie sich sowohl termdefiniert mittels $a_n = a_0 + nd$ als auch rekursiv mittels $a_{n+1} = a_n + d$ mit gegebenen Werten a_0 und d (jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$) darstellen. Eine der beiden Darstellungen kann als Definition dienen, und die andere ist dann ein Theorem. Rekursiv gilt auch $a_{n+2} = a_{n+1} + d$, so dass wir aus beiden Rekursionsgleichungen d eliminieren können, was schließlich zu

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

führt. Spätestens jetzt sehen wir, dass wir das auch schon vorher hätten sehen können! Zugleich erkennen wir, dass wir diese Eigenschaft als *neue Definition* nutzen können, wodurch die beiden zuerst genannten jeweils als Theorem erscheinen. Und analog können wir damit offenbar auch geometrische und harmonische Folgen beschreiben:

➤ *Eine reelle Zahlenfolge ist genau dann **arithmetisch** bzw. **geometrisch** bzw. **harmonisch**, wenn jedes Glied (bis auf das erste) das arithmetische bzw. das geometrische bzw. das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarn ist.*

Dies wird in der Regel eine ungewohnte Sichtweise sein, obwohl sie „natürlich“ ist.

Wir sehen dann: An die Stelle einer dieser drei konkreten Mittelwertfunktionen kann offensichtlich eine beliebige Mittelwertfunktion treten, was zum allgemeinen Begriff einer *Mittelwertfolge* führt! Wenn wir aber schon auf diese Weise *spielerisch* vorgehen, dann liegt die folgende *Variante von „Mittelwertfolge“* nahe: Wir starten mit zwei Anfangsgliedern a_0 und a_1 und erzeugen alle weiteren als Mittelwert ihrer beiden Vorgänger! Das führt dann mit Sicherheit zu zwei ganz unterschiedlichen Typen von Mittelwertfolgen, die wir z. B. durch die Bezeichnungen „Mittelwertfolgen 1. Art“ und „Mittelwertfolgen 2. Art“ unterscheiden können. Da es nun viel einfacher ist, aus zwei benachbarten Folgengliedern deren Mittelwert zu berechnen und diesen für das auf sie folgende Glied zu nehmen, statt so vorzugehen, dass jedes Glied (bis auf das erste) der Mittelwert seiner beiden Nachbarn ist (denn hier muss ja eine ggf. komplizierte Gleichung gelöst werden), werden wir diese einfacher zu konstruierenden Folgen als von „1. Art“ bezeichnen. Und sodann erfinden wir rein *spielerisch* gleich noch „Mittelwertfolgen 3. Art“, wobei wir (zunächst) nur *zweistellige Mittelwertfunktionen* zugrunde legen werden:

Definition: Es sei $\langle a_n \rangle$ eine reelle Zahlenfolge und M eine Mittelwertfunktion.

- (1) $\langle a_n \rangle$ ist genau dann eine **Mittelwertfolge 1. Art** bezüglich M , wenn jedes Folgenglied (bis auf die ersten beiden) der *Mittelwert seiner beiden Vorgänger* ist.
- (2) $\langle a_n \rangle$ ist genau dann eine **Mittelwertfolge 2. Art** bezüglich M , wenn jedes Folgenglied (bis auf das erste) der *Mittelwert seiner beiden Nachbarn* ist.
- (3) $\langle a_n \rangle$ ist genau dann eine **Mittelwertfolge 3. Art** bezüglich M , wenn jedes Folgenglied der *Mittelwert seiner beiden Nachfolger* ist.

Diese verbalen Definitionen liefern der Reihe nach

$$a_{n+2} = M(a_n, a_{n+1}), \quad a_{n+1} = M(a_n, a_{n+2}) \quad \text{und} \quad a_n = M(a_{n+1}, a_{n+2}).$$

Während sich Mittelwertfolgen 1. Art einfach und konstruktiv durch Termauswertung der jeweils zugrunde gelegten Mittelwertfunktion ergeben, können bei den anderen beiden erhebliche Probleme bei dem erforderlichen Lösen der Gleichung entstehen!

Die obigen drei Definitionen lassen sich wie folgt zusammenfassen: $\langle a_n \rangle$ ist genau dann eine **Mittelwertfolge**, wenn von jeweils drei aufeinanderfolgenden Folgengliedern eines (mit bestimmter Positionsangabe!) der Mittelwert der beiden anderen ist. (Und diese Positionsangabe ist dann für jede Mittelwertfolge eine innere Konstante!). Und so dann liegt es nahe, diese Definition zu **verallgemeinern**, indem wir uns auf k -stellige Mittelwertfunktionen beziehen ($k \geq 2$): *Von jeweils $k+1$ aufeinanderfolgenden Folgengliedern ist das jeweils ℓ -te ($\ell \in \{1, \dots, k+1\}$) der Mittelwert seiner k „Nachbarn“.*¹⁹

Diesen Gedankengang typisch *spielerisch-mathematischer Verallgemeinerung* können wir hier nicht weiter verfolgen. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung der oben definierten Mittelwertfolgen zu zweistelligen Mittelwertfunktionen!

Zunächst wollen (und müssen!) wir aber ausschließen, dass die drei o. g. Begriffe inhaltsleer sind. Für Mittelwertfolgen 2. Art ist dies bereits klar, denn arithmetische, geometrische und harmonische Folgen waren ja gerade der Anlass zu dieser Begriffsbildung. *Ob es allerdings zu jeder Mittelwertfunktion eine „nichtriviale“ Mittelwertfolge 2. Art gibt, ist damit noch nicht entschieden!* Wohl aber triviale, nämlich „konstante“ Folgen.

Für die Überprüfung der Existenz nichtrivieraler Mittelwertfolgen 1. und 3. Art legen wir versuchsweise zunächst das arithmetische Mittel $A(x, y)$ zugrunde:

Falls $a_{n+2} = A(a_n, a_{n+1})$ gilt, liegt eine „fortgesetzte Halbierung“ vor, und es ergibt sich etwa mit den Anfangsgliedern 1 und 2 für den Folgenanfang 1, 2, 1.5, 1.75, ... – Wir haben darüber hinaus sofort ein Gefühl für die grundsätzliche Konvergenz im Sinne einer Intervallschachtelung: *Denn wegen des konstruktiven Aspekts ist klar, dass es zu jeder Mittelwertfunktion eine Mittelwertfolge 1. Art gibt, sofern die beiden Anfangsglieder positiv sind.*

Ist nun $a_n = A(a_{n+1}, a_{n+2})$, so gilt $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$, womit es möglich wird, dass die Folgenglieder nicht in \mathbb{R}_+ bleiben: So ergibt sich z. B. mit $a_0 := 1$ und $a_1 := 2$ der Folgenanfang 1, 2, 0, 4, -4, 12, -20, ... (eine in *unserem* System „nicht zugelassene“ Mittelwertfolge), hingegen erhalten wir $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $a_0 := a_1 := 1$. *Somit ist zunächst noch ungeklärt, ob es überhaupt „nichtriviale“ Mittelwertfolgen 3. Art gibt!*

Wir können diese Frage nun z. B. wie folgt angehen: Mittelwertfolgen 3. Art sind ja in gewisser Weise „rückwärts“ zu lesende Mittelwertfolgen 1. Art, bei denen also der „Anfang“ nach links hin aufgehoben und stattdessen „irgendwo rechts“ platziert wird. Damit ergeben sich bei Bezug auf das arithmetische Mittel „fortgesetzte Verdoppelungen“, und wir sehen, dass es bei Beschränkung auf \mathbb{R}_+ nur triviale Mittelwertfolgen 3. Art gibt, nämlich konstante Folgen. Nehmen wir aber z. B. das geometrische Mittel, so erhalten wir etwa mit $a_0 := 1$ und $a_1 := 2$ den Folgenanfang $2^0, 2^1, 2^{-1}, 2^3, 2^{-5}, 2^{11}, 2^{-21}, \dots$, wie man leicht nachrechnet. Es gibt also Mittelwertfunktionen mit nichtrivialen Mittelwertfolgen 3. Art (wobei zumindest die letztgenannte divergiert!). Und verwenden wir zur Folgenkonstruktion das harmonische Mittel mit denselben Anfangsgliedern, so erhalten wir den Folgenanfang $1, 2, 2/3, -2, 2/7, \dots$, womit also erneut der Bereich \mathbb{R}_+ gesprengt wird (sofern diese spezielle Folge überhaupt wohldefiniert ist, weil sie noch auf mögliche Division durch Null untersucht werden muss!).

Jahrgang 10 bzw. 11

Im Jahrgang 10 oder 11 könnte man etwa wie folgt vorgehen: Das arithmetische Mittel sei schon bekannt. Falls Zahlenfolgen schon bekannt sind, wird man exemplarisch konkrete arithmetische Folgen vorlegen und daran unschwer (2) aus der Definition ent-

decken lassen, was dann auch die Bezeichnung „arithmetische Folge“ rechtfertigt und (irgendwann) zu der rekursiven und der termdefinierten Darstellung als Satz führt. Spielerische Variation führt dann entweder zunächst zu geometrischen (und vielleicht auch schon zu harmonischen) Folgen oder aber zu arithmetischen Folgen im Sinne von (1), die man dann „arithmetische Folgen 1. Art“ nennen könnte, verbunden mit dem Hinweis, dass dies aber keine übliche Bezeichnung sei. Falls Zahlenfolgen jedoch noch nicht bekannt sind, lassen sie sich mit Hilfe von beliebigen Mittelwerten einführen, etwa:

- Wähle zwei Zahlen. Berechne eine dritte als Mittelwert der ersten beiden. Berechne dann eine weitere als Mittelwert seiner beiden „Vorgänger“ und so weiter. Was fällt Dir auf? Wie geht das wohl weiter?

Hier erweist es sich als sinnvoll, ein Tabellenkalkulationsprogramm einzusetzen (PC oder Taschencomputer), um damit schnell eine Fülle von Entdeckungen zu machen. So stoßen wir auf diese Weise direkt in die Analysis über Folgen zur konkreten Vorbereitung der Begriffe *monoton*, *beschränkt*, *alternierend*, *konvergent* und *divergent* vor, um diese dann später abstrakt definieren zu können. Abb. 11 und Abb. 12 zeigen erste Glieder von Mittelwertfolgen erster, zweiter und dritter Art – hier zunächst nur für das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel, wobei lediglich die Startglieder ausgetauscht wurden.

Abb. 11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	A1	A2	A3	G1	G2	G3	H1	H2	H3
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	1,5000	3	0	1,4142	4	0,5	1,3333	#DIV/0!	0,6667
5	1,7500	4	1	1,6818	8	8	1,6000	#DIV/0!	-2,0000
6	1,6250	5	-4	1,5422	16	0,031	1,4545	#DIV/0!	0,2857
7	1,6875	6	12	1,6105	32	2048	1,5238	#DIV/0!	-0,2222
8	1,6563	7	-20	1,5760	64	5E-07	1,4884	#DIV/0!	0,0870
9	1,6719	8	44	1,5931	128	9E+12	1,5059	#DIV/0!	-0,0488
10	1,6641	9	-84	1,5845	256	3E-26	1,4971	#DIV/0!	0,0230

Aber allein schon ein solcher Wechsel der Startglieder kann offenbar das „Verhalten“ der Folgen gravierend ändern. Z. B. gilt ja bei H_1 , wenn wir die ersten drei Glieder vorübergehend mit a , b , c bezeichnen,

Abb. 12

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	A1	A2	A3	G1	G2	G3	H1	H2	H3
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1,5000	0	3	1,4142	0,5	4	1,3333	0,6667	#DIV/0!
5	1,2500	-1	-1	1,1892	0,25	0,25	1,1429	0,5000	#DIV/0!
6	1,3750	-2	7	1,2968	0,125	64	1,2308	0,4000	#DIV/0!
7	1,3125	-3	-9	1,2419	0,0625	1E-03	1,1852	0,3333	#DIV/0!
8	1,3438	-4	23	1,2691	0,0313	4E+06	1,2075	0,2857	#DIV/0!
9	1,3281	-5	-41	1,2554	0,0156	2E-13	1,1963	0,2500	#DIV/0!
10	1,3359	-6	87	1,2622	0,0078	8E+25	1,2019	0,2222	#DIV/0!

$c = ab/(2a-b)$ (wegen $b = 2ac/(a+c)$). Und daher kann Division durch Null auftreten! (Die grau hervorgehobenen Spalten markieren nicht mögliche bzw. nicht zugelassene Mittelwertfolgen.) Viele Fragen und Aktivitäten können sich anschließen:

- Bei welchen Anfangsgliedern kann bei H_2 bzw. bei H_3 Division durch Null auftreten? Kann man die Anfangsglieder so wählen, dass dieser Fall niemals eintritt?
- Können bei den anderen Folgen „kritische“ Situationen eintreten?
- Bilde Mittelwertfolgen mit anderen Mittelwerten ... Untersuche sie ...

Denn wir können ja beliebige neue Mittelwertfunktionen und damit Mittelwertfolgen (1. und ggf. auch 2. oder 3. Art) definieren: ²⁰ Ist nämlich $S : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ beliebig gegeben und $M(x, y) := (x + y \cdot S(x, y)) / (1 + S(x, y))$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$, so ist M stets eine Mittelwertfunktion, die darüber hinaus genau dann kommutativ (bzw. symmetrisch) ist, wenn $S(x, y) \cdot S(y, x) = 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt, was für $S(x, y) = f(x, y) / f(y, x)$ mit beliebiger Funktion f von \mathbb{R}_+^2 in \mathbb{R}_+ erfüllt ist, wie man (tatsächlich!) leicht sieht.

Und wir können weitere Mittelwertfolgen erfinden: „verschränkte Mittelwertfolgen“ wie z. B. bei dem babylonischen Algorithmus und bei dem Gregory-Algorithmus, indem wir spielerisch bei diesen beiden die dort verwendeten Mittelwertfunktionen durch andere ersetzen. Wir können das Chuquetmittel (Mediante) zur Konstruktion von Mittelwertfolgen verwenden, wie es 1484 bereits Nicolas Chuquet ganz ähnlich gemacht hat:

Sind etwa $x_0, x_1 \in \mathbb{N}^*$ beliebig gewählt mit $x_0 < x_1$, und schreiben wir $x_0 = x_0/1$ und $x_1 = x_1/1$, so wähle man x_{n+2} für alle $n \in \mathbb{N}$ als vollständig gekürztes Chuquet-Mittel („Mediante“, vgl. Abschnitt 1) von x_n und x_{n+1} – es entsteht eine Intervallschachtelung!

Und nicht zuletzt ist ein berühmtes verschränktes Mittelwertfolgen-Paar von **Carl Friedrich Gauß** (1777 – 1855) zu erwähnen, das dieser 1791 im Alter von vierzehn Jahren (für sich) erfunden hat.²¹ Er betrachtet – ähnlich wie bei den Gregory-Rekursionen – zwei verschachtelt definierte Folgen, und zwar mit Hilfe des arithmetischen und des geometrischen Mittels: Sind $x, y \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt mit $x \leq y$, dann setzt er

$$x_0 := x, \quad y_0 := y, \quad x_{n+1} := G(x_n, y_n) \quad \text{und} \quad y_{n+1} := A(x_n, y_n)$$

(für alle $n \in \mathbb{N}$). Die beiden auf diese Weise definierten *Mittelwertfolgen* sind monoton und beschränkt und also auch konvergent, und sie *haben* einen *gemeinsamen Grenzwert*, nämlich das sog. **arithmetisch-geometrische Mittel**, das gemäß Gauß mit $\text{AGM}(x, y)$ bezeichnet wird. Es gilt $\text{AGM}(x, y) = \text{AMG}(x_n, y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und AGM ist seinerseits eine *neue Mittelwertfunktion*, d. h., es gilt u. a. $x \leq \text{AGM}(x, y) \leq y$.²²

Anmerkungen

- ¹ Vgl. etwa die Beiträge von Henze & Stummer und Lambert & Peters in diesem Heft.
- ² Vgl. den Beitrag von Hischer & Lambert in diesem Heft zur Axiomatisierung.
- ³ Aus: „Lexikon der Mathematik“. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag GmbH, S. 911.
- ⁴ Ford, L. R.: Fractions. In: *American Mathematical Monthly*, **45**(1938)9, 586–601.
- ⁵ Wir untersuchen diese Entdeckungen hier nicht weiter.
- ⁶ Man recherchiere hierzu im Internet, z. B. die „klassischen“ Publikationen von Georg Rieger.
- ⁷ Vgl. S. 6 in diesem Heft, Hischer: Mittenbildung als fundamentale Idee (S. 4–13).
- ⁸ Vgl. hierzu die Betrachtungen über das Chuquet-Mittel auf S. 5 f. in diesem Heft.
- ⁹ Man versuche, den umgekehrten Weg zu gehen: also von Berührungskreisen zu Koordinaten!
- ¹⁰ Vgl. hierzu Hischer: Viertausend Jahre Mittelwertbildung — Eine fundamentale Idee der Mathematik und didaktische Implikationen. In: *mathematica didactica* **25**(2002)2, 3–51.
- ¹¹ Mit freundlicher Genehmigung durch Bill Casselman vom 25. 04. 2002 entnommen aus: <http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/ybc/ybc.html> (und nachbearbeitet).
- ¹² Nach Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1968, S. 205.
- ¹³ Mehr dazu in Abschnitt 4 dieses Beitrags!
- ¹⁴ Vgl. eine schülerorientierte Hinführung in Hischer: *Mittelwertbildung — Eine der ältesten mathematischen Ideen*. In: *mathematik lehren*, 2003, Heft 119, 45.
- ¹⁵ Abbildungen entnommen aus: Resnikoff, Howard L. & Wells, R. O., jr.: *Mathematik im Wandel der Kulturen*. Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg, 1983, S. 65.
- ¹⁶ Siehe dazu bereits Joseph Ehrenfried Hofmann: *Rektifikation und Quadratur des Kreises in Unter- und Mittelstufe*. In: *Der Mathematikunterricht* **7**(1961)3, 46–71, (S. 60 ff.).
- ¹⁷ Man beachte: In der zweiten Rekursion wird auf U_{2n} und nicht auf U_n rekuriert!
- ¹⁸ Eine *aktuelle eigenständige Möglichkeit* ergibt sich durch interaktive Simulation mittels *beweglicher Geometrie (meist noch „dynamische“ Geometrie genannt)*.
- ¹⁹ Dies ist zwar eine „schöne“ und elegante Nummerierung, sie passt leider nicht zu dem „didaktisch schöneren“ Weg für zweistellige Mittelwertfunktionen in der Definition auf der vorherigen Seite. Wie soll man sich entscheiden? Hier zeigen sich sowohl die *Freiheit der Mathematik* als einer „*Wirklichkeit sui generis*“ als auch das Problem der „*antididaktischen Inversion*“.
- ²⁰ Vgl. Hischer & Lambert: Was ist ein numerischer Mittelwert? — Zur axiomatischen Präzisierung einer fundamentalen Idee. In: *mathematica didactica* **17**(2003)1, 3–42.
- ²¹ Vermutlich hat Joseph Louis Lagrange es bereits zuvor erfunden (vgl. S. 13 in diesem Heft).
- ²² Es ist erwähnenswert, dass auf dem AGM einer der derzeit schnellsten Algorithmen zur Approximation von π beruht, der 1976 unabhängig von Richard P. Brent und Eugene Salamin entdeckt wurde. Man recherchiere hierzu z. B. im Internet!