Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint

Mittelwertbildung —
eine der ältesten mathematischen Ideen

Horst Hischer

Preprint No. 81
Saarbrücken 2003

Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Mittelwertbildung — eine der ältesten mathematischen Ideen

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

submitted: April 09, 2003

Preprint No. 81

Saarbrücken 2003

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Im Stadtwald
D–66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 (0) 681 302 4443
E-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW : http://www.math.uni-sb.de/

Horst Hischer: Mittelwertbildung — eine der ältesten mathematischen Ideen

Im Unterricht erkennen: Es gibt beliebig viele Möglichkeiten zur Mittelwertbildung!

Es war einmal ...

In einer Schule erkrankte einst der Mathelehrer einer sechsten Klasse für längere Zeit. Der Schulleiter war ratlos, denn er hatte keinen Ersatz, und es war doch in dieser Klasse dringend die Bruchrechnung einzuführen! Da fiel sein Blick auf einen gerade nicht ausgelasteten Biologielehrer, denn „als Naturwissenschaftler kann der doch so was“. Und so übernahm dieser den Auftrag, erklärte den Kindern, was ein Bruch ist („Bruchstrich“, die Zahl darüber heißt „Zähler“, die darunter „Nenner“), wie man sie addiert (Zähler + Zähler durch Nenner + Nenner), kürzt und erweitert. Die Kinder hatten das sofort verstanden, und alsbald konnte die erste Klassenarbeit geschrieben werden, die zum Stolz des Biolehrers und zur Freude des Schulleiters glänzend ausfiel. Doch als der Biolehrer den Mathelehrer am Krankenbett besuchte, um von seinem Erfolg zu berichten, standen dem armen Kollegen die Haare zu Berge. Gefasst, aber freundlich erläuterte er am Beispiel ½+½, dass sich doch nach diesem Additionsverfahren und anschließendem Kürzen als Ergebnis wieder ½ ergeben würde. Dem Biolehrer wurde sein fataler Irrtum sofort bewusst, er bedankte sich für den Hinweis und begann gleich die nächste Mathestunde mit den Worten: „Also Kinder, der Kultusminister hat gerade einen neuen Erlass herausgegeben, und demnach werden Brüche künftig anders addiert ...“

Sinngemäß im Sommersemester 1967 von Prof. Dr. Bernhard Hornfeck an der Technischen Hochschule Braunschweig während seiner Vorlesung „Algebra I“ im Zusammenhang mit den Bruchrechenregeln in Körpern vorgetragen. (Männliche Formen wie „Lehrer“ wurden damals geschlechtsneutral verwendet.)

Die *Mittelwertbildung* ist eine „*Idee*“, die in großer begrifflicher Weite und Vielfalt die *gesamte Mathematik* durchzieht. So zeigen kulturgeschichtliche Untersuchungen, dass das Bilden von Mittelwerten die Menschheit beschäftigt hat, solange wir schriftliche Überlieferungen haben, dass diese Idee nämlich die Mathematik von ihren Anfängen bei den Babyloniern vor rund 4000 Jahren über die älteren Pythagoreer vor etwa 2500 Jahren bis in die heutige Zeit wie ein roter Faden durchzieht (Kasten 1). So erweist sich die Mittelwertbildung im deskriptiven Sinn als eine fundamentale Idee der Mathematik, die sich dann (neben anderen) auch im normativen Sinn als ein „roter Faden“ zur vertikalen Gestaltung des Mathematikunterrichts von der Primarstufe bis hin zum Abitur (und darüber hinaus) eignet.

Chuquet-Mittel

Das Beispiel einer fiktiven Klausurkorrektur führt uns auf eine paradoxe Situation (vgl. Kasten 2): das „Simpson-Paradoxon“ der Stochastik. In Abwandlung einer Formulierung von [Meyer 1994] erfahren wir damit exemplarisch: *Man kann global verlieren, obwohl man überall lokal gewinnt!*

Ein Paradoxon ist ein *scheinbarer Widerspruch*, der also (im Gegensatz zu einer Antinomie, die ein unauflösbarer Widerspruch ist) auflösbar ist. Typisch für Paradoxa ist ferner, dass diese scheinbaren Widersprüche nicht nur von einzelnen Menschen aufgrund etwa individueller, unzureichender Denkfähigkeit als solche empfunden werden, sondern dass diese Widersprüche eher *intersubjektiv* sind, also für nahezu alle Menschen gleichermaßen auftreten. Nach [Jahnke 1993] begeht unsere sonst sehr erfolgreiche kognitive Struktur vermutlich einen spontanen „lokalen Fehler“, der typisch für diese Struktur ist. So verfügen wir wohl über „grundlegende Vorstellungen“, auf die sich unser Denken und unsere Intuition stützen – „grundlegend“ in der Weise, dass diese Vorstellungen mit den Kernaussagen in diesen Paradoxa nicht zu vereinbaren sind, unser Denken sich also gegen solche Widersprüche auflehnt. Bei dem Simpson-Paradoxon sind nun gemäß [Jahnke 1993] möglicherweise zwei grundlegende Vorstellungen konstitutiv für das Entstehen dieses Widerspruchs: Die Vorstellungen von „Mittelwertbildung“ einerseits und von „Steigung“ bzw. „Wachstum“ andererseits.

Betrachten wir das Beispiel der ersten Klausurkorrektur in Kasten 2, so wird die Bewertung durch folgende *Mittelwertbildung* über beide Aufgaben erreicht:

„Bewertung von Aufgabe 1“ ⊕ „Bewertung von Aufgabe 2“ = „Bewertung der Klausur“

Numerisch sieht diese Verknüpfung wie folgt aus:

$$\frac{3}{16} \oplus \frac{23}{48} = \frac{26}{64}\ , \text{ allgemein: } \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Diese *neue Art*, „Brüche zu addieren“, ist aber gar nicht so neu, denn sie wurde nach [Boyer 1968, 304 f] bereits im Jahre 1484 von dem französischen Arzt Nicolas Chuquet in seinem Buch „Triparty en la science des nombres“ (also: „Dreiteilige Abhandlung über die Wissenschaft von den Zahlen“) verwendet, und Chuquet gab in seinem Buch auch eine „Regel“ über den Größenvergleich dieser drei Brüche an, nämlich in unserer heutigen Notation für beliebige positive Zahlen a, b, c und d:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \qquad (1)$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichungskette lässt sich mit elementaren Termumformungstechniken einfach nachweisen.

Da der „Summenbruch“ also zwischen den beiden Ausgangsbrüchen liegt, ist er ein *Mittelwert* zwischen diesen, der aus historischen Gründen „**Chuquet-Mittel**“ heißt. Auch [Herget 1985] verwendet diese Bezeichnung. [Jahnke 1993, 230] spricht hingegen von „Ampère-Mittel“, weil Ampère diesen Mittelwert im Jahre 1806 zum Beweis des „Schrankensatzes“ der Analysis benutzt hat. Und in der Zahlentheorie ist das Chuquet-Mittel unter der Bezeichnung „Mediante“ bekannt.

Die Ungleichungskette (1) lässt sich auch *visuell beweisen*, indem man die Brüche als *Steigungen von Strecken* interpretiert (Abb. 1):

Der „Summenbruch“ erscheint als Steigung der Verbindungsstrecke und damit als „mittlere Steigung“. Folgen wir der Anschauung, so können wir das Chuquet-Mittel offenbar darüber hinaus auf die *mittlere Steigung von endlich vielen Strecken* verallgemeinern:

$$\frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_2}{b_2} \oplus \ldots \oplus \frac{a_n}{b_n} := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

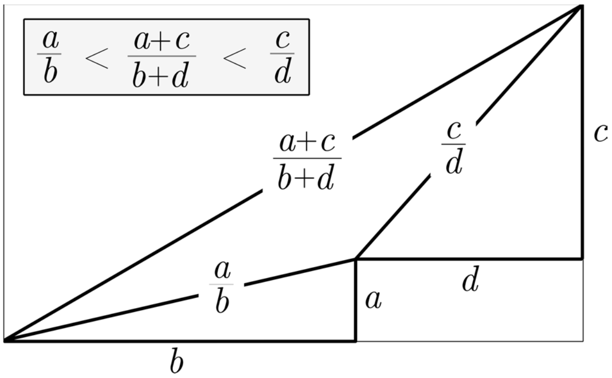


Abb. 1: Veranschaulichung des Chuquet-Mittels als Steigung

Zurück zur Klausuraufgabe in Kasten 2: Wenn wir bei der ersten Aufgabe die erreichbare Punktzahl verdoppeln, so erhalten wir

$$\frac{6}{32} \oplus \frac{23}{48} = \frac{29}{80}, \quad \text{und im Vergleich folgt} \quad \frac{26}{64} = \frac{130}{320} > \frac{126}{320} = \frac{29}{80}\ .$$

Der neue Bewertungsanteil ist also kleiner als der alte – trotz gleichbleibender relativer Bewertung der Einzelaufgaben! Diese neuartige „Addition“ ist also abhängig von der speziellen Bruchdarstellung, genauer: Es ist gar nicht möglich, eine „Addition“ von Brüchen auf diese Weise eindeutig zu erklären, weil das Ergebnis nicht unabhängig von der jeweiligen Bruchdarstellung ist. Aus algebraischer Sicht ist diese „Addition“ nicht „wohldefiniert“ (d. h.: *nicht repräsentantenunabhängig*), es lässt sich somit *kein* Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{B},\oplus)$ über der Menge $\mathbb{B}$ der Bruchzahlen mit dieser neuartigen „Addition“ erklären!

Wir begegnen hier der kontextabhängigen Doppeldeutigkeit des Begriffs „Bruch“, die ja ohnehin für viele Verständnisschwierigkeiten verantwortlich ist und die wir auch nicht „per definitionem“ beseitigen können, wie man das in der Mathematik zu tun pflegt: nämlich der Deutung einerseits als Äquivalenzklasse und andererseits als Repräsentant dieser Äquivalenzklasse. Die Chuquet-Mittel-Addition darf also nur dann auf Brüche angewendet werden, wenn wir diese als *Repräsentanten* deuten, also als *geordnete Paare* aus Zähler und Nenner, während die betrachteten prozentualen Klausurbewertungen und die Durchschnittsgeschwindigkeiten für die Äquivalenzklassen dieser Repräsentanten stehen.

Also: Wenn wir „mathematisch sauber“ vorgehen wollen, so dürfen wir diese Doppeldeutigkeit der Bruchschreibweise $\frac{a}{b}$ nicht zulassen. Es bliebe dann nur die (in der Mathematik übliche) Deutung als Äquivalenzklasse, und das Chuquet-Mittel könnte nur für geordnete Paare definiert werden, nämlich mittels $(a;b) \oplus (c;d) := (a+c; b+d)$. Das würde zwar das Problem innermathematisch lösen, nicht jedoch außerhalb der Mathematik, weil das Symbol $\frac{a}{b}$ im „Rest der Welt“ faktisch doppeldeutig ist (und bei genauem Hinsehen sogar teilweise in der Mathematik, wobei diese Doppeldeutigkeit dann situativ richtig zu interpretieren ist).

In süddeutschen Gegenden versteckt sich dieser Sachverhalt auch in der sog. **Schorle-Aufgabe** (vgl. [Hischer 1998, 7], ferner [Biermann & Blum 2002, 20]):

> *Zwei Schorlegläser haben jeweils ein bekanntes Mischungsverhältnis aus Wein und Selters. Welches Mischungsverhältnis ergibt sich, wenn man beide Gläser zusammenschüttet?*

Diese Aufgabe ist ohne weitere Angaben *nicht lösbar*!

Das Chuquet-Mittel hilft jedoch weiter, wenn neben den Mischungsverhältnissen auch die Füllmengen in beiden Gläsern bekannt sind (Abb. 2).

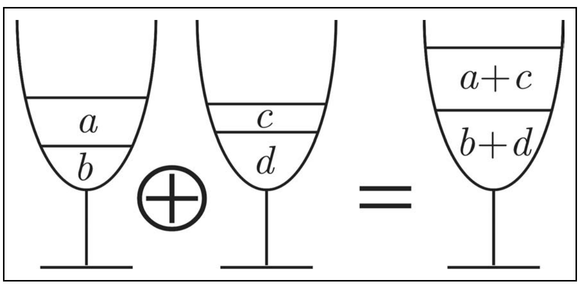


Abb. 2: Schorle-Aufgabe und Chuquet-Mittel

Analyse des Chuquet-Mittels

Betrachten wir die Beispiele $\frac{4}{10} \oplus \frac{1}{10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ und $\frac{2}{5} \oplus \frac{1}{10} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, so wird in beiden Fällen ein Mittelwert von $0{,}1$ und $0{,}4$ gebildet, nämlich das Chuquet-Mittel, und je nach Wahl des Repräsentanten erhalten wir unterschiedliche Ergebnisse, $\frac{1}{4}$ zw. $\frac{1}{5}$, also unterschiedliche „Mittelwerte". Und offenbar können wir wegen der Möglichkeit des Erweiterns bzw. Kürzens auf diese Weise *beliebig viele Mittelwerte* dieser beiden Zahlen erhalten!

Aber was ist nun eigentlich ein Mittelwert? Und allgemeiner: Was ist die „Mitte" von etwas? Was kann, soll das ein? Im Sinne dieses Gedankengangs beschränken wir uns hier auf *numerische Mittelwerte* und denken uns dazu eine zweistellige Funktion

$$M: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

gegeben.

Sind nun $x, y \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt, so soll der Funktionswert $M(x,y)$ dabei einen *„Mittelwert"* von x und y bedeuten. Mit Bezug auf Abb. 1 wählen wir dann dort zunächst die Katheten der beiden Steigungsdreiecke so, dass sie die Längen 1 und x bzw. 1 und y haben. Die Hypotenusen haben dann die Steigungen x bzw. y (Abb. 3), und als *mittlere Steigung* und damit als „Mittelwert" von x und y ergibt sich das Chuquet-Mittel

$$\frac{x}{1} \oplus \frac{y}{1} = \frac{x+y}{1+1},$$

also in diesem Fall das *arithmetische Mittel*.

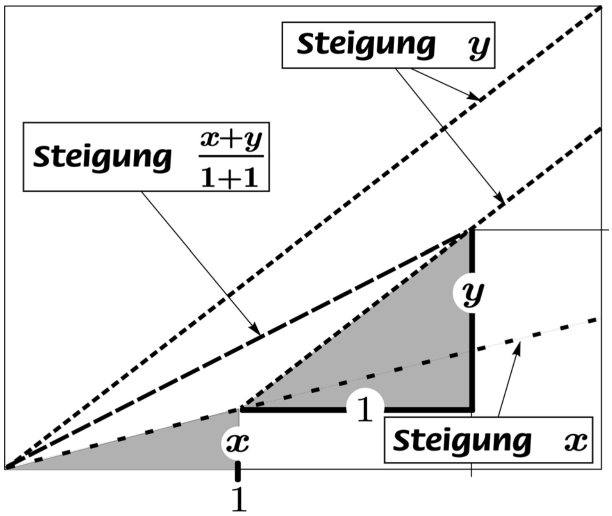


Abb. 3: Mittelwert von x und y — erster Ansatz

Wenn wir nun das zweite Steigungsdreieck mit einem positiven Streckfaktor s zentrisch verzerren, so können wir als „mittlere Steigung" offenbar *jeden Wert* zwischen x und y erhalten, wobei s zwischen 0 und ∞ variiert (Abb. 4), d. h., wir finden bei gegebener Funktion M ein geeignetes s, so dass gilt:

$$m := M(x,y) = \frac{x}{1} \oplus \frac{sy}{s} = \frac{x+sy}{1+s},$$

und daraus errechnen wir

$$s = \frac{m-x}{y-m}. \tag{3}$$

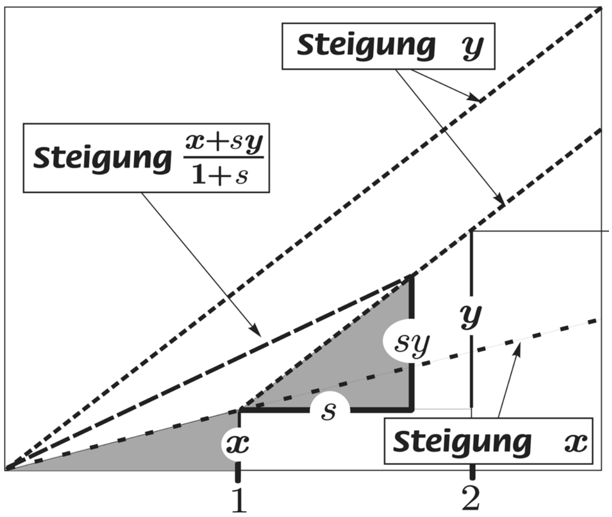


Abb. 4: Mittelwert von x und y — zweiter Ansatz

Wir beachten: Der eine konkrete Mittelwertfunktion M charakterisierende Streckfaktor s ist nicht notwendig eine Konstante, vielmehr gibt es also zu der Funktion M eine zweistellige Funktion $S: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ mit $S(x,y) = s > 0$ für alle x, y. Ist aber s stattdessen als beliebiger von x und y abhängiger Ausdruck (z. B. als Term) *gegeben*, d. h.

$$s = S(x,y) \text{ mit } S: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

so ist dann möglicherweise gemäß Abb. 4 vermöge

$$M(x,y) := \frac{x+sy}{1+s} \; (= \frac{x}{1} \oplus \frac{sy}{s}) \tag{5}$$

eine Mittelwertfunktion erklärt – sofern in akzeptabler Weise geklärt wurde, was solche Funktionen für Eigenschaften haben *sollen*. Das kann dann zu einer *Theorie numerischer Mittelwerte* führen, wie sie in [Hischer & Lambert 2002] dargestellt wird.

Mittelwertbildung als fundamentale Idee

Der bisherige Überblick macht nun in vielfacher Weise deutlich, dass die „Mittelwertbildung“ zu den fundamentalen Ideen gehört:

Historizität: Die „Mittelwertbildung“ als Idee ist *in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar*. Dies wird in Kasten 1 skizziert.

Archetypizität: Die „Mittelwertbildung“ ist auch *außerhalb der Mathemati*k auffindbar – gewissermaßen als ein *Archetyp des Denkens*. Gerade dieser Aspekt ist kennzeichnend für viele Alltagsprobleme, so etwa für das Auftreten des Simpson-Paradoxons (siehe Kasten 2), und zwar über die bereits anfangs erwähnten sog. „grundlegenden Vorstellungen“ im Sinne von [Jahnke 1993].

Wesentlichkeit: Die Mittelwertbildung *gibt (zumindest partiell) Aufschluss über das **Wesen** der Mathematik*. Denn bei einer Analyse dessen, was „Mittelwerte“ sind, treten u. a. folgende ***wesentliche** Aspekte mathematischen Tuns* auf: Vermuten, Formalisieren, Beweisen, Widerlegen, Argumentieren, Verallgemeinern, Veranschaulichen, Systematisieren und Theoriebildung.

Vagheit: Der Begriff eines *numerischen Mittelwerts* oder *Mittels* ist äußerst vielfältig und keinesfalls eindeutig. So kann bereits das Chuquet-Mittel zwischen zwei Brüchen als vieldeutiger „Mittelwert“ interpretiert werden, und jeder numerische „Mittelwert“ kann als Chuquet-Mittel aufgefasst werden, so dass sich beliebig viele numerische „Mittelwerte“ (als zweistellige Funktionen) erklären lassen, die sinnvollen axiomatischen Ansprüchen an Mittelwertbildung genügen (vgl. [Hischer & Lambert 2002]). Darüber hinaus gibt es auch *„nicht-numerische Mittel“*, etwa in der Geometrie (Mittelpunkt, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, ... , vgl. auch [Führer 1985]), ferner etwa in der Stochastik, wenn es um qualitative Merkmale geht. Das Themenheft [Winter 1985] bietet eine reichhaltige Übersicht bezüglich unterschiedlicher Mittelwerte.)

All dies waren ***deskriptive Kriterien***, die dazu dienen sollen, „fundamentale Ideen“ ausfindig zu machen. Daneben gibt es auch ***normative Kriterien***, die *Erwartungen an den Unterrichtsprozess* zum Ausdruck bringen. Für die Mittelwertbildung würde dies bedeuten:

Durchgängigkeit: Die Mittelwertbildung ist eine tragfähige Idee, um curriculare Entwürfe des Mathematikunterrichts *durchgängig* gliedern zu helfen – von der Primarstufe bis hin zum Abitur (und darüber hinaus). In Verbindung mit dem deskriptiven Kriterium der Historizität führt dies zur *Einbeziehung kulturhistorischer Aspekte der Genese von Begriffen, Problemen und Ideen* in den Unterricht, was eine „historische Verankerung“ ermöglichen soll: Es geht dann (vgl. [Hischer 1981] und [Hischer 1998]) um

> die Verwendung historischer Beispiele im Unterricht, die sich als tragfähige Bausteine einer Unterrichtseinheit erweisen. Dabei sollten sie gemäß Toeplitz vom „Staub der Zeit“ befreit und in heutiger Formulierung dargestellt werden. *„Geschichte der Mathematik“* erscheint in diesem Sinne als *didaktischer Aspekt* – zugleich wird ein *Beitrag zur Kulturgeschichte* geliefert.

Transparenz: Die Mittelwertbildung als Idee soll bei der Planung, Durchführung und Auswertung von Mathematikunterricht helfen, diesen für alle Beteiligten inhaltlich zu strukturieren und *transparent* zu machen.

Während die vier deskriptiven Kriterien dazu dienen können, durch theoretische Analyse und rationalen Diskurs einen Katalog fundamentaler Ideen zusammen zu stellen, ist bei den normativen Kriterien eine empirische Evaluation nötig, zumindest aber eine Sammlung subjektiver Unterrichtserfahrungen.

[Heymann 1996, 174] gibt sechs fundamentale Ideen an, die er „zentrale Ideen“ nennt, nämlich die *Idee* der *Zahl*, des *Messens*, des *funktionalen Zusammenhangs*, des *räumlichen Strukturierens*, des *Algorithmus* und des *mathematischen Modellierens*. Ersichtlich erfüllen diese Ideen die o. g. deskriptiven Kriterien für fundamentale Ideen. Zugleich fällt auf, dass die Idee der *Mittelwertbildung* nicht in diesen Rahmen hineinpasst: Sie ist trotz der ihr anhaftenden Vagheit viel konkreter als die Heymannschen Ideen. Andererseits erscheint sie gerade wegen ihrer Konkretheit viel unterrichtsnäher als die eher *zu* allgemeinen Heymannschen Ideen, die wiederum wegen ihrer Allgemeinheit und damit geringen Anzahl geeignet sind, in knapper Form grundsätzliche inhaltliche Aspekte des Mathematikunterrichts zu benennen.

Das führt zu der These, dass es ***fundamentale Ideen auf zumindest zwei verschiedenen Ebenen mit unterschiedlichem Konkretisierungsgrad*** gibt, die Mittelwertbildung also eine Idee auf solch einer zweiten, „konkreteren“ Ebene ist (vgl. [Hischer 1997] und [Hischer 1998]).

Es folgt die Skizze eines exemplarisch in vielen Teilen mehrfach vertikal erprobten Unterrichtsgangs, um zu verdeutlichen, wie auch die normativen Kriterien für fundamentale Ideen erfüllt werden können.

Mittelwertbildung im Unterricht

Das Themenheft [Winter 1985] über „Mittelwerte“ gibt ein Fülle von Anregungen zur Behandlung der Mittelwertbildung im Mathematikunterricht – sogar bereits in der **Primarstufe**, z. B. mit dem von [Spiegel 1985] vorgeschlagenen „*Mittelwert-Abakus*“ (Kasten 3). In Ergänzung hierzu sei mit Blick auf das Thema „Fundamentale Ideen“ hervorgehoben:

In den **Jahrgängen 5 und 6** sollte im Sinne der Entwicklung des Bruchverständnisses abgrenzend auch die „falsche“ Addition beim *Chuquet-Mittel* bewusst gemacht werden, zugleich aber auch ihre Nützlichkeit herausgestellt werden, etwa bei der Schorle-Aufgabe, bei prozentualen Bewertungen oder Durchschnittsgeschwindigkeiten (vgl. hierzu Kasten 2). Bereits in dieser Altersstufe können mit Hilfe des Chuquet-Mittels rein spielerisch *Farey-Folgen* erzeugt und beliebig verfeinert werden; dabei kann die Notwendigkeit des Kürzens zur Vermeidung von Vieldeutigkeiten erfahren werden (Kasten 4)!

In den **Jahrgängen 8 bis 9** kann dann als verbindendes Element zwischen den Themenbereichen *Bruchterme*, *Termumformungen*, *Bruchgleichungen und -ungleichungen*, *Algorithmen*, *Quadratwurzeln und Möglichkeiten ihrer Approximation* eine erste vorsichtig vertiefende Begegnung mit der Mittelwertbildung erfolgen, beispielsweise über einen *Zugang in historischer Verankerung*, wie er in Kasten 5 angedeutet und in [Hischer 2002] ausführlich dargestellt ist.

In den **Jahrgängen 9 bis 10** sollten die babylonischen Mittelwerte bei der Approximation von π mit Hilfe des *Algorithmus von Gregory*, ebenfalls in *historischer Verankerung*, wieder aufgegriffen werden (in Kasten 6 skizziert).

In der **Kursstufe**, ggf. auch schon in den **Jahrgängen 10 oder 11**, können der *babylonische Algorithmus* und der *Gregory-Algorithmus* unter dem Aspekt von *Folgenkonvergenz* und *Algorithmen* wieder aufgegriffen und vertieft werden (ausführlich in [Hischer 2002]).

Folgendes sei für die **Kursstufe** nur angedeutet: Im Rahmen von Funktionsuntersuchungen kann der *Begriff eines numerischen Mittelwerts theoretisch untersucht* werden, wobei ein wertvoller *Beitrag zur Axiomatisierung* geleistet werden kann (siehe [Hischer & Lambert 2003]). Die über solche axiomatischen Untersuchungen gewonnene Einsicht über die Erzeugbarkeit und Darstellbarkeit beliebiger Mittelwertfunktionen kann zur kreativen Erzeugung beliebiger *Mittelwertfolgen* und deren Untersuchung auf Konvergenz führen. Hierzu gehören auch verschachtelte Mittelwertfolgen, wie sie beim babylonischen Algorithmus und beim Gregory-Algorithmus auftreten. Ferner kann man das „arithmetisch-geometrische Mittel“ (kurz: AGM) von Gauß informierend ansprechen (Hinweis in Kasten 1). Und die Idee der Mittelwertbildung sollte z. B. auch in der Analysis bewusst gemacht werden (vgl. Kasten 2).

Weitere vielfältige Aspekte der Mittelwertbildung – etwa gemäß [Führer 1985] in der Geometrie („Was ist der Mittelpunkt einer Figur?“) oder in der Stochastik – sollten und können entsprechend den reichhaltigen Anregungen im Themenheft [Winter 1985] über „Mittelwerte“ an vielen Stellen des gesamten Mathematikunterrichts akzentuiert und auch thematisiert werden.

Literatur

Biermann, Mark & Blum, Werner: Realitätsbezogenes Beweisen. In: *mathematik lehren*, 110/2002, 19 – 22.

Boyer, Carl B.: A History of Mathematics. New York: John Wiley & Sons,1968.

Führer, Lutz: Welche Vielecke haben einen „Mittelpunkt“? In: [Winter 1985, 38 – 43].

Herget, Wilfried: Zoo der Mittelwerte. In: [Winter 1985, 50 – 51].

Heymann, Hans Werner: Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik, Band 13, Reihe Pädagogik. Weinheim / Basel: Beltz, 1996.

Hischer, Horst: „Historische Verankerung“ als methodische Variante im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht (Tagungsband 1981), 43.

Hischer, Horst: „Fundamentale Ideen“ und „Historische Verankerung“ — dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: *mathematica didactica* **21**(1998)1, 3 – 21; Kurzfassung in Müller, K. P. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 1987, 223 – 226.

Hischer, Horst: Viertausend Jahre Mittelwertbildung — Eine fundamentale Idee der Mathematik und didaktische Implikationen. Erscheint in: *mathematica didactica* **25**(2002)2.

Hischer, Horst & Lambert, Anselm: Was ist ein numerischer Mittelwert? — Zur axiomatischen Präzisierung einer fundamentalen Idee. Erscheint in: *mathematica didactica* **25**(2002)2.

Jahnke, Thomas: Das Simpsonsche Paradoxon verstehen – ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **14**(1993)3/4, 221 – 242.

Meyer, Jörg: Über einige Paradoxa aus der Stochastik. In: Müller, K. P. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1994 (Tagungsband). Hildesheim: Franzbecker, 239 – 242.

Spiegel, Hartmut: Der Mittelwertabakus. In: [Winter 1985, 16 – 18].

Winter, Heinrich (Hrsg.): Themenheft „Mittelwerte“, *mathematik lehren*, 8/1985.

Kasten 1

Zeittafel „Mittelwerte“

ca. 2000 v. Chr.	**Babylonier** (in Mesopotamien – dem Gebiet des heutigen Irak): *Algorithmus zur Approximation von Quadratwurzeln* (für ihre astronomischen Tabellen, dazu: **arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel**)
ca. 500 v. Chr.	**ältere Pythagoreer**: *erste theoretisch-systematische Untersuchungen von Mittelwerten* (in ihrer „Proportionenlehre“: Entdeckung von sieben weiteren Mittelwerten, insgesamt die sog. „zehn Mediäteten“)
ca. 300 v. Chr.	**jüngere Pythagoreer**: *arithmetische und geometrische Folgen* (aus unserer Sicht: „Mittelwertfolgen“) *„Mittelwerte“ in der Geometrie* (Mittelpunkt, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, ...)
1484	**Nicolas Chuquet**, in seinem Buch „Triparty en la science des nombres“: *Beschreibung des später nach ihm benannten Mittelwerts* $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, *„Chuqet-Mittel“*, in der Zahlentheorie auch *„Mediante“* genannt
Neuzeit (1500 ff)	**Mittelwerte in der Analysis** (z. B. Differenzenquotient, Mittelwertsätze der Differential- und Integralrechnung, bestimmtes Integral als Mittelwert einer Funktion, ...) **Mittelwerte in der Stochastik** (z. B. Häufigkeit, Median, Modalwert, Streuung, Varianz)
Hierunter hervorhebenswert:	
1667	**James Gregory** (1638 – 1675), in seinem Buch „Vera circuli et hyperbolae quadratura“: *der Kreis als harmonisch-geometrisches Mitte*l der einschachtelnden Polygonfolgen (siehe auch **Kasten 6**)
1791	**Carl Friedrich Gauß** (1777 – 1855): *Entdeckung des AGM*: *arithmetisch-geometrisches Mittel*, heute Grundlage für einen besonders schnellen Algorithmus zur Approximation von π (siehe z. B. [Hischer 2002])
1816	**John Farey** (1766 – 1826), in seinem Artikel “On a curious property of vulgar fractions” in der Zeitschrift “Philosophical Magazine“: *Beschreibung der nach ihm benannten Farey-Folgen* (siehe auch **Kasten 4**)

Kasten 2

Ein Paradoxon:

Man kann insgesamt verlieren, obwohl man überall einzeln gewinnt! — Wie ist das möglich?

Wir betrachten die Korrektur einer Matheklausur, die nur aus zwei Aufgaben bestehen möge. Die Aufgaben seien von der erwarteten Bearbeitung her so grundsätzlich unterschiedlich, dass es dem Aufgabensteller, der zugleich Referent ist, geraten scheint, bei der ersten Aufgabe 16 erreichbare Punkte vorzusehen, bei der zweiten hingegen aus Gründen einer ihm gebotenen detaillierteren Differenzierung gar 48 erreichbare Punkte. Da es bei der Bewertung ohnehin nur auf den prozentualen Anteil der erreichten Punkte ankommt, ist dieses für den Referenten aus Gründen der Proportionalität ohne Belang. Einverstanden?

Bei der Durchsicht der konkreten Klausur eines Schülers möge sich dann eine Punktverteilung wie in folgender Tabelle ergeben. Setzt man die Mindestgrenze für die Note „ausreichend“ z. B. bei 40% der erreichbaren Punkte an, so würde sich hier also gerade noch ein „ausreichend“ ergeben.

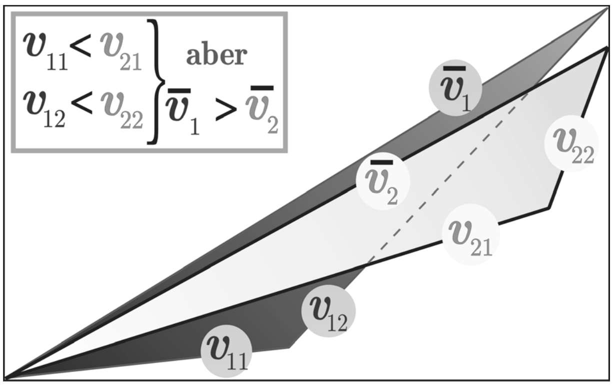
1. Korrektur	Aufg. 1	Aufg. 2	Summe
erreichbare Punkte	16	48	64
erreichte Punkte	3	23	26
Anteil an Aufgabe	**18,8%**	**47,9%**	**40,6%**

Die Klausur möge dann einer Korreferentin übergeben werden. Sie hält bei Aufgabe 1 eine feinere Punktverteilung für angemessen, und um Bruchteile von Punkten möglichst zu vermeiden, verdoppelt sie die Anzahl der erreichbaren Punkte. Auch dieses ist wegen der bereits erwähnten Proportionalität „offensichtlich“ ohne Belang mit Blick auf eine gerechte Bewertung. Einverstanden?

2. Korrektur	Aufg. 1	Aufg. 2	Summe
erreichbare Punkte	32	48	80
erreichte Punkte	7	24	31
Anteil an Aufgabe	**21,9%**	**50,0%**	**38,8%**

Sie vergibt dann bei der ersten Aufgabe 7 anstelle der erwarteten 6 Punkte, und bei der zweiten Aufgabe hält sie einen weiteren zu gebenden Punkt für angemessen, den ihrer Meinung nach der Referent vergessen hat. So was kann vorkommen. Beide Aufgaben werden somit von der Korreferentin besser bewertet als vom Referenten, aber die Überraschung ist groß: Trotz dieser besseren Einzelbewertung fällt ihre Gesamtbewertung schlechter aus als beim Referenten, denn es werden weniger als 40% erreicht, und somit lautet die Note „mangelhaft“.

Dies führt zu erregten Debatten im Lehrerzimmer – gleichwohl wird an dieser zweiten, verbesserten Korrektur trotz emsigen Nachrechnens kein Fehler entdeckt. Die Unruhe und Betroffenheit bleibt, bis schließlich eine Mathematikreferendarin des Rätsels Lösung präsentiert: Sie hatte nämlich einige Semester vorher in einer Stochastikvorlesung etwas über das sog. „Simpson-Paradoxon“ gehört, und damit erkannte sie sogleich, dass damit diese Irritation erklärt und aufgelöst werden konnte.



Die nächste Abbildung zeigt ein weiteres „Paradoxon“: Wir können diese Darstellung als ein sog. „Weg-Zeit-Diagramm“ lesen, wie es in der Physik üblich ist, hier etwa für die Bewegung zweier Autofahrer: Nach rechts wird die Zeit abgetragen und nach oben der zurückgelegte Weg. Eine „Strecke“ (hier: eine Dreiecksseite) in einem solchen Diagramm beschreibt dann eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, denn die Zunahme des Weges ist proportional zur verstrichenen Zeit. So können wir dann speziell in diesem Weg-Zeit-Diagramm die Steigungen der Dreiecksseiten als die Geschwindigkeiten der beiden Autofahrer interpretieren. Doch damit würde folgende kuriose Situation vorliegen:

Einer der beiden Autofahrer (dunkelgrau dargestellt) fährt der Reihe nach mit den konstanten Geschwindigkeiten von z. B. $v_{11} = 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und dann $v_{12} = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, der andere dagegen (hellgrau dargestellt) mit jeweils größeren Geschwindigkeiten, etwa $v_{21} = 70\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und dann $v_{22} = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, dennoch hat der dunkelgraue, scheinbar „langsamere“, eine größere Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}_1$ als der hellgraue, scheinbar „überall schnellere“, wie wir aus den Steigungen ablesen können.

Übrigens: Wir können diese Abbildung auch zur Veranschaulichung des Paradoxons bei der „Klausurbewertung“ verwenden! Vielleicht gar zur Deutung?

Kasten 3

Der Mittelwertabakus (3./4. Schuljahr)

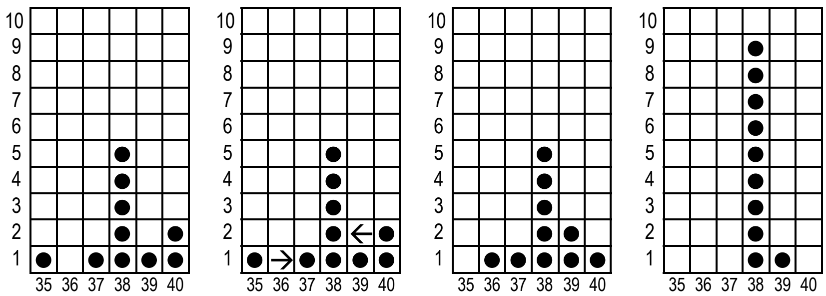
In der Grundschule könnte man beim Rahmenthema „Sachrechnen“ im 3. oder 4. Schuljahr gleichartige, neue Streichholzschachteln auf die „mittlere Anzahl“ der abgefüllten Streichhölzer untersuchen lassen, gewissermaßen als „Qualitätskontrolle“. Hierzu eignet sich beispielsweise der „Mittelwertabakus“ von [Spiegel 1985], der wie folgt funktioniert: Alle Schachteln werden einzeln bezüglich der Streichholzanzahl untersucht und dann in Art eines Histogramms sortiert (siehe Abbildung, ganz links). Anschließend wird wie folgt vorgegangen:

> *Nimm eine ganz rechts liegende Schachtel, nimm ein Streichholz heraus, und verschiebe die Schachtel dann um eine Position nach links, also in eine Abteilung, bei der die Schachteln jeweils ein Streichholz weniger enthalten. Lege dann das herausgenommene Streichholz in eine Schachtel ganz links, und verschiebe diese Schachtel zur Korrektur um eine Position nach rechts.*

Wir erarbeiten, dass dadurch die Gesamtanzahl der Schachteln und der Streichhölzer und damit auch die durchschnittliche Anzahl der Streichhölzer je Schachtel nicht geändert wird. Dann setzen wir das Verfahren mit derselben Anweisung fort. Nach einigen Schritten ergeben sich keine Änderungen mehr, und wir sind fertig (siehe Abbildung, ganz rechts).

Als Ergebnis erhalten wir in diesem Beispiel, dass die Schachteln durchschnittlich etwas mehr als 38 Streichhölzer enthalten (genau: $38\frac{1}{10}$), und damit wurde mit Hilfe dieses Abakus ein *Mittelwert* experimentell ermittelt.

Aber warum ist $38\frac{1}{10}$ der Mittelwert? Wir haben 9 Schachteln mit 38 Streichhölzern und eine Schachtel mit 39. Entfernen wir aus dieser letzten Schachtel ein Streichholz, so haben wir zehn Schachteln mit 38 Streichhölzern. Das übrig gebliebene Streichholz müssen wir in Gedanken auf die zehn Schachteln gleichmäßig aufteilen, es also gedanklich in zehn gleich große Teile zerbrechen!

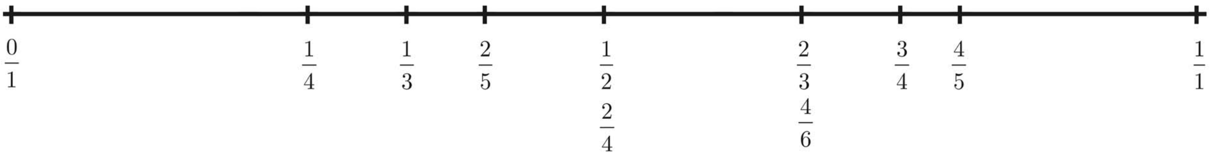


Kasten 4

Farey-Folgen (ab 6. Schuljahr) und **Ford-Kreise** (ab 10./11. Schuljahr)

Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag, in ihrem Heft auf dem Kästchenpapier eine Strecke der Länge 10 cm (als Teil des Zahlenstrahls) waagerecht zu zeichnen und die Endpunkte 0 bzw. 1 mit $\frac{0}{1}$ bzw. $\frac{1}{1}$ zu bezeichnen. Sodann sollen sie Folgendes machen: Sie sollen mit diesen beiden Brüchen einen neuen Bruch bilden, dessen Zähler die Summe der Ausgangszähler und dessen Nenner die Summe der Ausgangsnenner ist. Diesen neuen Bruch sollen sie auch auf der Strecke (oder ggf. dem Zahlenstrahl) einzeichnen. Und nunmehr sollen sie folgendermaßen weiter verfahren: Nimm zwei vorhandene Brüche, erzeuge nach dem Verfahren einen neuen und zeichne ihn ein.

Eine mögliche Zwischenstufe könnte so aussehen:



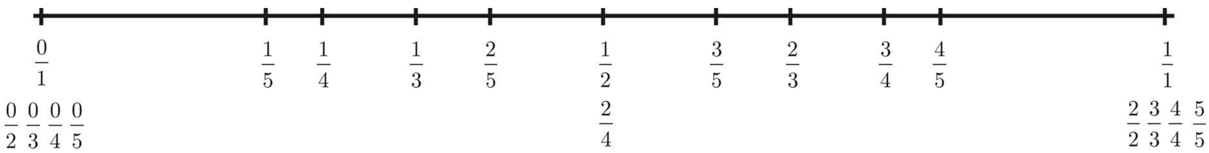
Die Schülerinnen und Schüler entdecken spielerisch:

- Jeder neu erzeugte Bruch liegt *zwischen* den beiden Ausgangsbrüchen (*„Mittelwert“*).
- Alle neuen Brüche liegen innerhalb der Ausgangsstrecke.
- Es ist für den „Ergebnisbruch“ wichtig, ob man vollständig gekürzte oder erweiterte Brüche wählt.

Der Auftrag wird nun abgeändert: Sie sollen alle Brüche aufschreiben, deren Nenner höchstens 5 (bzw. $2, 3, 4,$ ...) ist und die nicht größer als 1 sind. Sie sollen dann diese Brüche der Größe nach ordnen und wie bisher auf dem Zahlenstrahl eintragen. Zunächst werden systematisch folgende Brüche gefunden:

$$\frac{1}{1}\;\frac{1}{2}\;\frac{2}{2}\;\frac{1}{3}\;\frac{2}{3}\;\frac{3}{3}\;\frac{1}{4}\;\frac{2}{4}\;\frac{3}{4}\;\frac{4}{4}\;\frac{1}{5}\;\frac{2}{5}\;\frac{3}{5}\;\frac{4}{5}\;\frac{5}{5}$$

Die Anordnungsversuche auf dem Zahlenstrahl führen schließlich zu:



Da man bei dieser Anordnung eine Symmetrie erkennt, die nur ganz links gestört ist, führt das zur Ergänzung um die Brüche $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}$, wie hier schon eingezeichnet wurde.

Die Schülerinnen und Schüler entdecken:

- Die gesamte Anordnung ist symmetrisch zum *Mittelpunkt* der Strecke.
- Jeder Bruch (bis auf die Randpunkte) ist *Mittelwert* seiner beiden Nachbarn nach dem zuvor erzeugten Verfahren, aber: Das stimmt nur, wenn vollständig gekürzte Brüche verwendet werden.

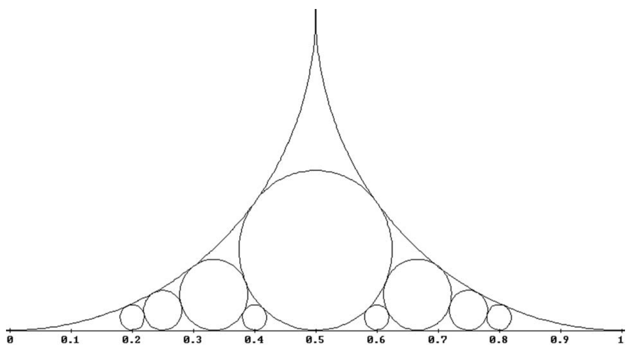
Wenn wir oben die kürzbaren Brüche in der zweiten Zeile fortlassen, liegt eine „Farey-Folge“ vor (im Beispiel: der „Ordnung 5“).

Wir zeichnen nun (etwa mit einem Computeralgebrasystem) zu dem Bruch $\frac{a}{b}$ einer Farey-Folge einen Kreis um den Punkt $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ mit dem Radius $\frac{1}{2b^2}$ und erhalten z. B. bei der Ordnung 5 das folgende Bild. Das klappt bei allen Ordnungen! Die Kreise heißen nach ihrem Entdecker „Ford-Kreise“.

Wir stellen fest:

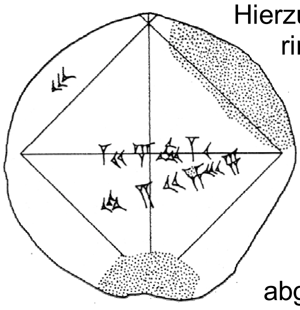
- Jeder Kreis (bis auf die Randkreise) ist in gewissem Sinn ein *Mittelwert* zwischen seinen beiden Nachbarn (welche sind das?).
- Zu je zwei „Nachbarkreisen“ finden wir in diesem Sinn konstruktiv einen neuen Kreis als Mittelwert mit Hilfe der zuvor kennen gelernten „Bruchaddition“ bei Farey-Folgen.

Weiterhin: Wir recherchieren im Internet zu den Themen „Farey-Folgen“ (*Farey Series*, *Farey Sequences*) und „Ford-Kreise“ (*Ford Circles*) ...!



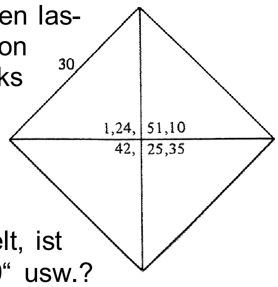
Ein historisch orientierter Zugang zu Mittelwerten in Jahrgang 8 bis 9

Wir gehen davon aus, dass den Schülerinnen und Schülern das „Berechnen" von Quadratwurzeln mittels Wurzeltaste des Taschenrechners geläufig ist, dass jedoch noch kein Algorithmus zur „händischen" Berechnung zur Verfügung steht. Zum Einstieg kann man ihnen Abbildungen von Keilschrifttafeln zeigen, insbesondere die berühmte Keilschrifttafel „Yale YBC 7289" (detailliertere Informationen und Quellenangaben in [Hischer 2002]):



Hierzu muss man den Schülerinnen und Schülern dann erzählen, dass es sich um eine Darstellung in Keilschrift handelt und dass es den Archäologen gelungen ist, diese Schrift zu entschlüsseln: Sie haben dazu die Toneindrücke sorgfältig abgeschrieben („Transkription") und dann entschlüsselt („Transliteration").

Auch sind natürlich weitere Hintergrundinformation über den damaligen Kulturkreis (Mesopotamien, etwa das Gebiet des heutigen Irak) und die Keilschrift angebracht, die sich die Schülerinnen und Schüler ggf. auch selbstständig aus dem Internet besorgen können.



Mit solchen Informationen und Kenntnissen über die Keilschrift kann man die nachfolgende Transliteration zumindest nachvollziehen lassen, bei hinreichender Zeit sogar erarbeiten lassen. Wichtig ist dabei die Erkenntnis, dass es einen (senkrechten) Keilstrich (von unten nach oben) für die „Einer" und einen (waagerechten) Keilstrich (von links nach rechts, es waren offenbar Linkshänder!) für „Zehner" gab, dass es sich also um Strichlisten mit „Bündelung" handelte. Für Schülerinnen und Schüler in dem Alter zählt es zu spannenden Erfahrungen, „Geheimschriften" entziffern zu können und dabei anderen etwas voraus zu haben.

Dass es sich hierbei um ein Quadrat mit eingezeichneten Diagonalen handelt, ist offensichtlich. Aber was bedeutet z. B. „$1, 24, 51, 10$", was bedeutet die „30" usw.? Wenn man im Unterricht sexagesimale Darstellungen (etwa in diesem Rahmen) behandelt hat, können die Schülerinnen und Schüler dies selber deuten, sonst gibt man Ihnen eine Hilfe:

$$\text{„}1, 24, 51, 10\text{“ bedeutet } 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$

Dazu wird man dann klären (ggf. mittels Internet), dass die Babylonier damals, vor rund 4000 Jahren, anstelle unseres Zehnersystems die Grundzahl Sechzig benutzten, was sich bis heute z. B. in der Zeiteinteilung und im Winkelmass erhalten hat.

Berechnung des obigen Summenterms mit dem Taschenrechner liefert $1{,}414213_5$, was bei den Schülerinnen und Schülern Assoziationen zum Näherungswert für $\sqrt{2}$ hervorrufen sollte. Warum $\sqrt{2}$? Und was ergibt dann „$42, 25, 35$"? Soll das nun

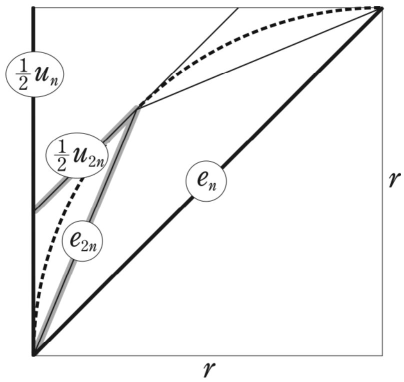
$$42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2} \quad \text{oder} \quad \frac{42}{60}+\frac{25}{60^2}+\frac{35}{60^3}$$

bedeuten? Beides wäre ja denkbar! Und man sollte hier mitteilen, dass bei den Babyloniern in der Tat beide Deutungen möglich waren. Die richtige konnte man jeweils nur aus dem Zusammenhang erkennen. Links ergibt sich als Näherungswert $42{,}426388_8$ und rechts $0{,}70710648_1$, entsprechend ergäbe sich für die Deutung der „30" entweder 30 oder $0{,}5$. Nun ist Detektivarbeit nötig! Es wird auffallen, dass $0{,}70710648_1 \approx \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist. Sollte es sich bei den Zahlen um Längenangaben handeln? Dann würde es passen, denn die Diagonalenlänge ist stets das $\sqrt{2}$-fache der Kantenlänge. Und das passt auch, wenn die Kantenlänge als 30 gedeutet wird, denn $42{,}426388_8$ ist ungefähr das $\sqrt{2}$-fache! Nun haben wir es: An der Diagonalen steht der Umrechnungsfaktor zwischen Kantenlänge und Diagonalenlänge, und dann ist noch ein konkretes Beispiel angegeben.

Aber wie haben die Babylonier vor rund 4000 Jahren ohne Taschenrechner und Computer so hervorragende Approximationen erhalten? Spätestens jetzt ist der Boden dafür bereitet, zu erzählen, dass wir wissen, dass Pythagoras in Mesopotamien war und von dort die Kenntnis über drei Mittelwerte mitgebracht hat ... (Detaillierte Ausführungen dazu und zum weiteren Vorgehen in [Hischer 2002].)

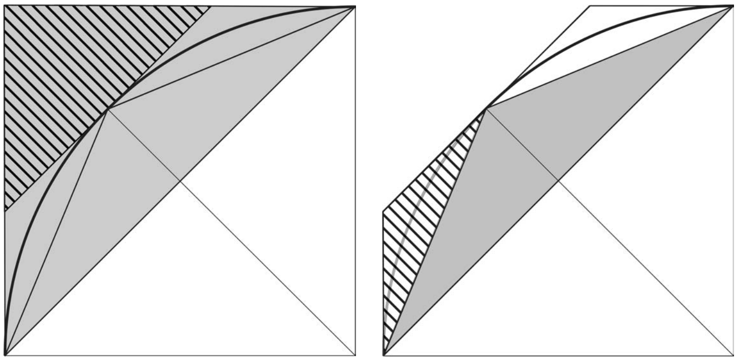
Kasten 6

Der Algorithus von James Gregory zur Approximation von π



Wie beim bekannten archimedischen Verfahren wird ein Kreis vom Radius r nach dem Prinzip fortgesetzter Verdoppelung der Eckenanzahlen durch ein- und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke approximiert. Bezeichnen wir die Seitenlänge eines einbeschriebenen n-Ecks mit e_n und die des umbeschriebenen mit u_n, so zeigt das erste Bild einen Ausschnitt des n-Ecks und des $2n$-Ecks, und zwar hier für $n = 4$.

Wir erkennen zwei Paare von jeweils ähnlichen Dreiecken. Dieses kann man sehr schön auf dem Overheadprojektor visualisieren, indem man die zu betrachtenden Dreiecke mit gleichfarbigen Folienstücken bedeckt und diese dann ineinander schiebt. (Die jeweils ähnlichen Dreiecke sind hier grau und schraffiert dargestellt.)



Die Schülerinnen und Schüler können diese Ähnlichkeit auch eigentätig im Heft durch Auflegen und Verschieben ausgeschnittener Dreiecke entdecken. Oder sie simulieren den Sachverhalt mit einem Programm zu Dynamischer Geometrie.

Aber warum sind die Dreiecke jeweils ähnlich?

Aus Symmetriegründen besteht jedes Dreieckspaar aus gleichschenkligen Dreiecken, und die Scheitelwinkel sind jeweils gleich groß, weil es jeweils die Eckwinkel regelmäßiger n-Ecke bzw. $2n$-Ecke sind!

Aufgrund der Ähnlichkeit können wir nun folgende Gleichungen aus der ersten Abbildung ablesen:

$$\frac{e_n}{\frac{1}{2}u_n} = \frac{u_{2n}}{\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{2n}}, \quad \frac{e_n}{e_{2n}} = \frac{e_{2n}}{\frac{1}{2}u_{2n}}$$

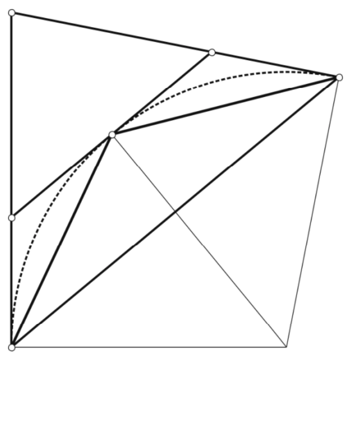
Da es unser Interesse sein muss, die Größen des $2n$-Ecks auf die des n-Ecks zurückzuführen, da ferner in der ersten Gleichung nur u_{2n} vorkommt, hingegen in der zweiten e_{2n} *und* u_{2n}, ergibt sich als Strategie, die erste Gleichung nach u_{2n} aufzulösen und die zweite nach e_{2n}. Sodann erhalten wir durch Äquivalenzumformung:

$$u_{2n} = \frac{e_n \cdot u_n}{e_n + u_n}, \quad e_{2n}{}^2 = \tfrac{1}{2}e_n \cdot u_{2n}$$

Bezeichnen wir die Umfänge des umbeschriebenen bzw. des einbeschriebenen n-Ecks mit U_n bzw. E_n, so ergeben sich hieraus mit $U_n = n \cdot u_n$ und $E_n = n \cdot e_n$ die verschachtelten Gregory-Rekursionen:

$$U_{2n} = H(E_n, U_n), \; E_{2n} = G(E_n, U_{2n})$$

Wir beachten, dass in der zweiten Rekursion U_{2n} und nicht U_n steht! Diese Rekursionen liefern einen (im Gegensatz zum archimedischen Verfahren) numerisch einfach durchzuführenden Approximationsalgorithmus für π, der dennoch ablaufäquivalent mit dem archimedischen ist!



Die auf dem Strahlensatz beruhenden Verhältnisse wurden zwar für $n = 4$ veranschaulicht, sie sind jedoch unabhängig von n. Es reicht sogar aus, die Zeichnung so zu verallgemeinern, dass man zwei beliebige Punkte auf dem Kreisrand auswählt, den Bogen zwischen ihnen durch ihren *Mittelpunkt* halbiert und daran dann die gesamte Planskizze aufbaut.

Für die Erarbeitung und die Durchführung des Verfahrens sind der Strahlensatz, das harmonische und das geometrische Mittel (und damit die Quadratwurzel) erforderlich. Es kann damit bereits im Jahrgang 9 oder 10 (oder ggf. sogar schon im Jahrgang 8) behandelt werden.