„Fundamentale Ideen“ und „Historische Verankerung“

dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung

von

Horst Hischer, Braunschweig

Zusammenfassung: In der Mathematikdidaktik sind wir derzeit Zeugen einer Verunsicherung bezüglich altbewährter Ziele, Inhalte und Methoden — provoziert durch den Computer und seine Gefolgschaft. In diesem Zusammenhang wird neuerdings wieder an das auf Bruner zurückgehende Konzept der „fundamentalen Ideen“ angeknüpft. Da ein wesentliches Kennzeichen fundamentaler Ideen – neben anderen – darin besteht, daß sie in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind, liegt eine Nähe zum Konzept der „historischen Verankerung“ vor: Und zwar soll mit diesem eine *innermathematische Beziehungshaltigkeit* erreicht werden (indem sie eine Belegung der methodischen Variablen „Verbindung“ von Vollrath darstellt). In diesem Sinn kann dann *Geschichte der Mathematik* ein spannender didaktischer Aspekt bei der inhaltlichen und methodischen Gestaltung von Mathematikunterricht sein.

Dieses didaktische Anliegen wird exemplarisch am Beispiel der *Mittelwertbildung* verdeutlicht, indem die These vertreten wird, daß die Mittelwertbildung zu den fundamentalen Ideen der Mathematik gehört. Schließt man sich dem Konzept von Heymann bezüglich fundamentaler Ideen an (die bei ihm „zentrale Ideen“ heißen), so würde dann allerdings folgen, daß es „fundamentale Ideen“ auf zumindest zwei unterschiedlichen Konkretisierungsniveaus gibt!

Summary: In mathematics education there is a sort of uncertainty at present with regard to approved goals, contents and methods — caused by the computer and its consequences. In this context a comeback of Bruner’s concept of „fundamental ideas“ can be observed. One of the characteristics of f. i. in mathematics is their correspondence to the history of mathematics; therefore, in forming out contents and methods in mathematics education, the history of mathematics may be serve as an interesting aspect.

This didactical desire is now to be demonstrated by the example of mean values. The thesis is advanced that forming mean values belongs to the fundamental ideas of mathematics.

Vorbemerkung

Im Rahmen der aktuellen Allgemeinbildungsdiskussion werden in letzter Zeit auch wieder „fundamentale Ideen“ erörtert. Dabei ist trotz unterschiedlicher Auffassungen ein gemeinsamer Kern dessen erkennbar geworden, was „*fundamentale Ideen der Mathematik*“ sein könnten, und zwar, wie es Schweiger 1992 herausgearbeitet hat: [1]

Fundamentale Ideen der Mathematik ...

🕮	sind aufzeigbar in der *historischen Entwicklung* der Mathematik,	
Σ	geben (zumindest partiell) Aufschluß über *das Wesen der Mathematik*,	*deskriptiv*
☯	sind, gewissermaßen als *Archetypen des Denkens*, auch außerhalb der Mathematik auffindbar,	

⇳	sind tragfähig, um curriculare Entwürfe des Mathematikunterrichts *vertikal* zu gliedern,	*normativ*
👓	sind geeignet, den Mathematikunterricht beweglicher und *durchsichtiger* zu gestalten.	

Die *ersten drei Kriterien* haben ***deskriptiven*** Charakter, d. h., sie können hilfreich sein bei der Suche nach fundamentalen Ideen im Rahmen von Bildungsplanung. Die *letzten beiden Kriterien* hingegen sind *präskriptiv* bzw. ***normativ***, d. h. sie bringen Erwartungen an einen gemäß solchen Ideen konzipierten Unterricht zum Ausdruck. Über diese fünf Aspekte hinaus ist noch zu berücksichtigen, daß die Bedeutsamkeit von Ideen mit zunehmender Präzision abnimmt, insbesondere also:

Fundamentale Ideen der Mathematik ...

≈	sind eher vage als präzise.

Ideen werden somit erst dadurch „fundamental“, daß sie ein *hinreichendes Maß an* Allgemeinheit und ***Unschärfe*** besitzen, so etwa die „Idee der Zahl“.

---

[1] vgl. [Schweiger 1992, S, 207]

Dies alles sei nun erläutert am Beispiel der

„Mittelwertbildung“ — Was ist das eigentlich?

Wir betrachten dazu die nebenstende Abbildung (Abb. 1). Als Physiker wird man diese wohl als Weg-Zeit-Diagramm interpretieren, und die Steigungen der Dreiecksseiten könnten dann z. B. die Geschwindigkeiten von Autofahrern sein. Es ist damit offenbar folgende Situation möglich:

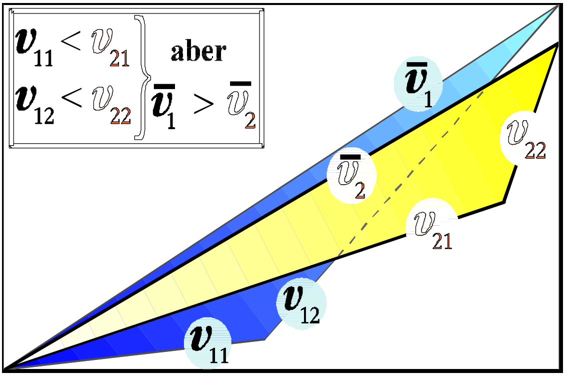

Abb. 1

Einer der beiden Autofahrer (dunkelgrau dargestellt) fährt z. B. der Reihe nach mit den konstanten Geschwindigkeiten 30 km/h und 100 km/h, der andere dagegen (hellgrau dargestellt) mit den jeweils größeren Geschwindigkeiten 70 km/h und 120 km/h, dennoch hat der dunkelgraue, scheinbar „langsamere“, eine größere Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}_1$ als der hellgraue, scheinbar „überall schnellere“.

Wir können diese Abbildung aber auch anders interpretieren: Die beiden Dreiecke stehen für die Bewertung von zwei Klausuren mit jeweils 2 Aufgaben. Horizontal wird die jeweils erreich***bare*** Punktzahl abgetragen, vertikal hingegen die jeweils individuell erreich***te*** Punktzahl. Die beiden Klausuren stimmen dann zwar in der erreichbaren Gesamtpunktzahl überein, nicht jedoch in der Verteilung der erreichbaren Punkte auf die beiden Aufgaben. Somit liegt hier die kurisose Situation vor, daß bei der hellgrau dargestellten Klausur beide Aufgaben für sich genommen prozentual eine höhere Bewertung haben als die entsprechenden Aufgaben bei der dunkelgrau dargestellten Klausur — was wir an den Steigungen sehen — dennoch aber die Gesamtbewertung der „dunkelgrauen“ Klausur besser ausfällt als die der „hellgrauen“. Gesprächsstoff für das Lehrerzimmer!?

Höhere Einzelbewertungen führen somit nicht notwendig zu einer höheren Gesamtbewertung, ggf. sogar zu einer niedrigeren! In Anlehnung an Jörg Meyer: [2]

Man kann also global verlieren, obwohl man überall lokal gewinnt!

2 In Abwandlung einer Formulierung von [Meyer 1994]: Man kann lokal gewinnen, aber global verlieren.

Präsentiert man dieses Phänomen mathematischen Laien ohne eine solche Veranschaulichung, so liegt für sie ein eklatanter Widerspruch vor, den sie intuitiv mit Alltagswissen kaum auflösen können (Archetypen des Denkens!). Mathematiker hingegen werden in diesen Beispielen das sog. „Simpson-Paradoxon“ aus der Statistik wiedererkennen.

Für das Simpson-Paradoxon hat nun Th. Jahnke die Vermutung ausgesprochen, daß zwei grundlegende Vorstellungen konstitutiv für das Entstehen dieses scheinbaren Widerspruchs sind: nämlich die Vorstellung von *Mittelwertbildung* einerseits und die von *Steigung* bzw. *Wachstum* andererseits. [3] Wenn wir nun die Abbildung wieder als Klausurkorrektur interpretieren, so wird die Gesamtbewertung hier nach folgendem Muster vorgenommen:

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Diese neuartige „Bruchaddition“ würde zwar im Mathematikunterricht aus Schülersicht manches leichter machen, doch leider ist sie bekanntlich nicht wohldefiniert! – Der Grund dafür liegt darin, daß ein Bruch üblicherweise doppeldeutig ist, weil er sowohl als Äquivalenzklasse als auch als Repräsentant dieser Klasse, also als Zahlenpaar, gedeutet werden kann.

Diese falsche Art der „Bruchaddition“ hat dennoch Tradition, denn sie wurde bereits vor über 500 Jahren im Jahre 1484 von dem französischen Arzt Nicolas Chuquet in seiner dreiteiligen Abhandlung über *Zahlen* („Triparty en la science des nombres“ [4]) verwendet, und er beschrieb auch den Größenvergleich dieser drei Brüche, den wir in heutiger Notation wie folgt darstellen würden:

$$\bigwedge_{a,b,c,d \in \mathbb{R}_+} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad \text{(damals für } \mathbb{N}^* \text{ zu formulieren!)}$$

Zum Beweis genügen Kenntnisse von Klasse 9. Da der „Summenbruch“ also zwischen den beiden Ausgangsbrüchen liegt, ist er ein *Mittelwert* zwischen diesen, den man aus historischen Gründen *Chuquet-Mittel* von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ nennt. [5] Diese Ungleichungskette läßt sich nun einfach veranschaulichen, indem man die Brüche als Steigungen interpretiert, worauf z. B. auch Th. Jahnke hingewiesen hat (Abb. 2):

---

[3] vgl. [Jahnke 1993]

[4] vgl. [Boyer 1968, S. 304]

[5] vgl. [Boyer 1968, S. 305], [Herget 1985] (die von [Jahnke 1993] vorgeschlagene Bezeichnung „Ampère-Mittel“ wäre dann jedoch historisch nicht gerechtfertigt)

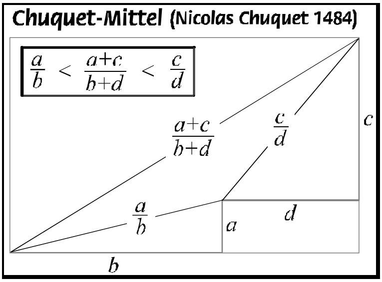

Abb. 2

Das **Chuquet-Mittel** erscheint dann als *Steigung der Verbindungsstrecke* und damit **als *mittlere Steigung*.**

Berücksichtigen wir, daß die Chuquet-Mittel-Addition *auf Repräsentanten von Brüchen angewendet* wird, so liegt mit dem „Chuquet-Mittel“ also offenbar ein „Mittelwert“ zwischen diesen Brüchen vor!

In süddeutschen Gegenden kennt man diesen Sachverhalt auch als sog. „Schorle-Aufgabe“:

> *Du hast zwei Schorlegläser mit jeweils einem bekannten Mischungsverhältnis aus Wein und Selters. Welches Mischungsverhältnis ergibt sich, wenn man beide Gläser zusammenschüttet?* [6]

Das Chuquet-Mittel gibt dann die gesuchte Antwort, und es ist anschaulich einleuchtend, daß das Mischungsverhältnis der Mixtur zwischen denen der beiden Ausgangsmischungen liegen muß. Und es sei noch ergänzt, daß man das Chuquet-Mittel auch in der Zahlentheorie kennt, und zwar unter der Bezeichnung „Mediante“ bei den sog. „Farey-Folgen“. [7]

Aber nochmals die Frage: Was ist eigentlich ein Mittelwert?

Betrachten wir die Beispiele $\frac{4}{10} \oplus \frac{1}{10} = \frac{5}{20}$ und $\frac{2}{5} \oplus \frac{1}{10} = \frac{3}{15}$, so wird hier in beiden Fällen der Mittelwert von 0,1 und 0,4 gebildet, und je nach Wahl des Repräsentanten erhielten wir unterschiedliche Ergebnisse, $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{5}$, also unterschiedliche „Mittelwerte“. Und offenbar können wir wegen der Möglichkeit des Erweiterns bzw. Kürzens auf diese Weise beliebig viele „Mittelwerte“ dieser beiden Zahlen erhalten!

Im Sinne dieser Gedankengangs verallgemeinern wir den Sachverhalt und denken uns eine beliebige

$$\textit{Mittelwertfunktion} \quad M : \mathrm{IR}_+^2 \to \mathrm{IR}_+$$

---

6 nach einem Hinweis von Johannes Schornstein, Freiburg

7 vgl. z. B. [Scheid 1991, S. 62]

gegeben, deren Funktionswerte $M(x,y)$ wir „*Mittelwerte*“ nennen und die wir nun näher untersuchen wollen. Wir wählen zunächst die Katheten der beiden Steigungsdreiecke so, daß sie die Längen 1 und x bzw. 1 und y haben. Die Hypotenusen haben dann die Steigungen x bzw. y (Abb. 3), und als *mittlere Steigung* und damit als „Mittelwert“ von x und y erhalten wir das Chuquet-Mittel

$$\frac{x}{1} \oplus \frac{y}{1} = \frac{x+y}{1+1}\,,$$

also das *arithmetische Mittel*.

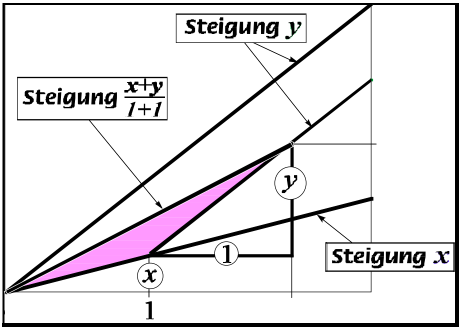

Abb. 3

Wenn wir nun das zweite Steigungsdreieck mit einem positiven Streckfaktor λ ähnlich verzerren, können wir dann als „mittlere Steigung“ offenbar jeden Wert zwischen x und y erhalten, wobei λ zwischen 0 und ∞ variiert (Abb. 4), d. h. wir können erwarten, ein geeignetes λ zu finden, so daß gilt:

$$M(x,y) = \frac{x}{1} \oplus \frac{\lambda y}{\lambda} = \frac{x+\lambda y}{1+\lambda}\,, \text{ also}$$

$$\lambda = \frac{m-x}{y-m} \quad \text{mit} \quad m := M(x,y).$$

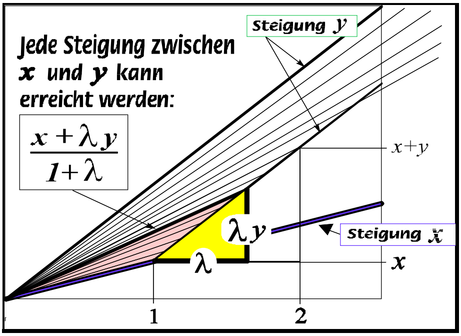

Abb. 4

Hierbei ist λ nicht etwa eine Konstante, sondern ein Term in x und y. Ist andererseits λ als beliebiger Term in x und y gegeben, so ist dann möglicherweise durch

$$M(x,y) := \frac{x+\lambda y}{1+\lambda} \left(= \frac{x}{1} \oplus \frac{\lambda y}{\lambda}\right)$$

eine *Mittelwertfunktion* erklärt.

Wir merken nun aber, daß es einer Präzisierung dessen bedarf, was man unter einer „Mittelwertfunktion“ verstehen will! Unabhängig davon liegt also die Vermutung nahe, daß sich numerische Mittelwerte stets als Chuquet-Mittel auffassen lassen und auch umgekehrt – daß also das Chuquet-Mittel eine allgemeine Form eines numerischen Mittelwerts ist. So könnte man zu einer Theorie numerischer Mittelwerte gelangen! Interessanterweise wurde nun genau das Längenverhältnis $\frac{m-x}{y-m}$ bereits vor rund 2500 Jahren von den Pythagoreern verwendet, um unterschiedliche Mittelwerte zu charakterisieren! [8]

[8] vgl. [Hischer 1994 a] und [Hischer & Scheid 1995]

In diesem Sinne finden wir *bei den Pythagoreern bereits eine erste Theorie der Mittelwerte*!

„Mittelwertbildung“ als fundamentale Idee

Zurück zum Simpson-Paradoxon und den beiden Eingangsbeispielen: „Mittelwerte“ bilden also insofern für uns eine „grundlegende Vorstellung“, als man nicht Mathematik studiert haben muß, um die Paradoxie in diesen Beispielen zu spüren — offenbar reicht hierzu eine einfache „Alltagskenntnis“ über Brüche und evtl. noch über Prozentsätze aus. Die Mathematik ist jedoch hilfreich und wohl auch nötig bei der Auflösung dieses Widerspruchs.

Mittelwerte bilden jedoch auch noch in einem weiteren Sinne eine „grundlegende Vorstellung“ für uns: Kulturgeschichtliche Untersuchungen zeigen nämlich, daß das Bilden von Mittelwerten die Menschheit beschäftigt hat, solange wir schriftliche Überlieferungen haben, und daß die *Idee des Bildens von Mittelwerten* zugleich die Mathematik von ihren ersten Anfängen bis in die heutige Zeit wie ein roter Faden durchzieht. Ich greife einige markante Aspekte heraus:

- vor 4500 Jahren bei der babylonischen Approximation von Quadratwurzeln für ihre astronomischen Tabellen,
- vor 2500 Jahren bei den „älteren Pythagoreern“ im Rahmen erster systematischer Untersuchungen von Mittelwerten in ihrer „Proportionenlehre“ (s. o.),
- im 3. Jht. v. Chr. bei den „jüngeren Pythagoreern“ im Rahmen der Untersuchung von arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen,
- in der Neuzeit bei der Entwicklung der Analysis (z. B. Differenzenquotient, Mittelwertsätze der Differential- und der Integralrechnung, bestimmtes Integral als Mittelwert einer Funktion) und bei der Entwicklung der Stochastik (z. B. Häufigkeit, Median, Modalwert, Streuung, Varianz).

Ferner gibt es Mittelwerte in der Geometrie, z. B. Mittelpunkt, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende. [9] *Mittelwertbildung* ist somit nicht nur typisch für einen bestimmten mathematischen Bereich, also etwa nur im Sinne einer „bereichsspezifischen Strategie“, [10] vielmehr handelt es sich um eine Vorstellung oder eine „*Idee*“, die in recht unterschiedlichen Formen und begrifflichen Fassungen die *gesamte Mathematik* durchzieht.

Ich formuliere daher die

---

9 vgl. [Führer 1985]

10 gemäß [Tietze & Klika & Wolpers 1982; Neubearbeitung 1997]

These 1: **Die „Mittelwertbildung“ ist eine fundamentale Idee**. [11]

Diese These verteidige ich mit Hilfe der eingangs genannten Kriterien für fundamentale Ideen:

- Zunächst ist die *„Vagheit“* der Mittelwertbildung hervorzuheben: Schon der Begriff eines numerischen Mittelwerts ist äußerst vielfältig und keinesfalls eindeutig, denn das „Chuquet’sche Mittel“ zwischen zwei Brüchen kann als „Mittelwert“ interpretiert werden – und jeder „Mittelwert“ zwischen zwei Zahlen ist offenbar auch als ein Chuquet’sches Mittel aufzufassen, wobei der Begriff „Mittelwert“ noch einer begrifflichen Präzisierung bedarf. Es lassen sich also beliebig viele numerische „Mittelwerte“ (als zweistellige Funktionen) erklären, die sämtlich vernünftigen axiomatischen Ansprüchen an Mittelwertbildung genügen. Darüber hinaus gibt es „nicht-numerische Mittel“, etwa in der Geometrie oder in der Stochastik, wenn es um qualitative Merkmale geht.

- Des weiteren erfüllt die „Mittelwertbildung“ aber auch die weiteren *deskriptiven Kriterien*, die an „fundamentale Ideen“ zu richten sind:

  – *Die „Mittelwertbildung“ ist aufzeigbar in der historischen Entwicklung der Mathematik* (wie ich bereits angedeutet habe).

  – *Die „Mittelwertbildung“ gibt (zumindest partiell) Aufschluß über das Wesen der Mathematik*.
  (Bei einer tiefergehenden Untersuchung dessen, was „Mittelwerte“ sind, treten u. a. folgende wesentliche Aspekte mathematischen Tuns auf: Vermuten, Formalisieren, Beweisen, Widerlegen, Argumentieren, Verallgemeinern, Veranschaulichen, Systematisieren und Theoriebildung.)

  – *Die „Mittelwertbildung“ ist auch außerhalb der Mathematik auffindbar — gewissermaßen als ein Archetyp des Denkens*.
  (Gerade dieser Aspekt ist kennzeichnend für viele Alltagsprobleme, so etwa für das Auftreten des „Simpson-Paradoxons“, und zwar über die auf S. 6 erwähnten sog. „grundlegenden Vorstellungen“ im Sinne von Jahnke.)

Hinsichtlich der beiden *normativen Kriterien* für fundamentale Ideen ist nun folgendes zu beachten:

---

[11] vgl. auch [Winter 1985], der hier einer von „zentralen Idee“ spricht

- *Fundamentale Ideen* — wie z. B. die Mittelwertbildung — sollen bei der Planung und Durchführung von Mathematikunterricht helfen, diesen inhaltlich zu strukturieren (ohne jedoch stets explizit im Vordergrund stehen zu müssen).

Weiterhin sehen wir an diesem Beispiel, wie man **kulturhistorische Aspekte** der *Genese von Begriffen, Problemen und Ideen* in den Unterricht einfließen lassen kann, und das führt mich auf die

Historische Verankerung

Hier knüpfe ich zunächst an den energischen Appell von Otto Toeplitz aus dem Jahre 1927 an: [12]

> (...) alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden, der Mittelwertsatz, die Taylorsche Reihe, der Konvergenzbegriff, das bestimmte Integral, vor allem der Differentialquotient selbst, und bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen?, alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.

Toeplitz hatte hier die Vorstellungen von Felix Klein im Sinne der so genannten „genetischen Methode“ weiterentwickelt (vgl. Abb. 5 auf der nächsten Seite). Damit wird im Sinne von Freudenthal und Wittmann „Beziehungshaltigkeit“ hergestellt, [13] und zwar eine *innermathematische Beziehungshaltigkeit*. Zugleich ist dies eine Belegung der methodischen Variablen „Verbindung“, die Vollrath 1976 zur Planung und Beschreibung von Unterricht eingeführt hat. [14]

Da heute in der Pädagogischen Psychologie der Begriff „genetische Methode“ im Sinne von „ontogenetisch“ gebraucht wird, hier jedoch die kulturhistorische Entwicklung von Begriffen gemeint ist, habe ich statt dessen die Bezeichnung *historische Verankerung* vorgeschlagen [15] und knüpfe damit zugleich bewußt an die „Verankerung“ im Sinne von Ausubel an.

---

[12] [Toeplitz 1927, S. 92], zitiert auch bei [Wittmann 1974, 1978^5, S. 127]

[13] [Wittmann 1974, 1978^5]

[14] [Vollrath 1976]

[15] [Hischer 1981; 1994 b, c]

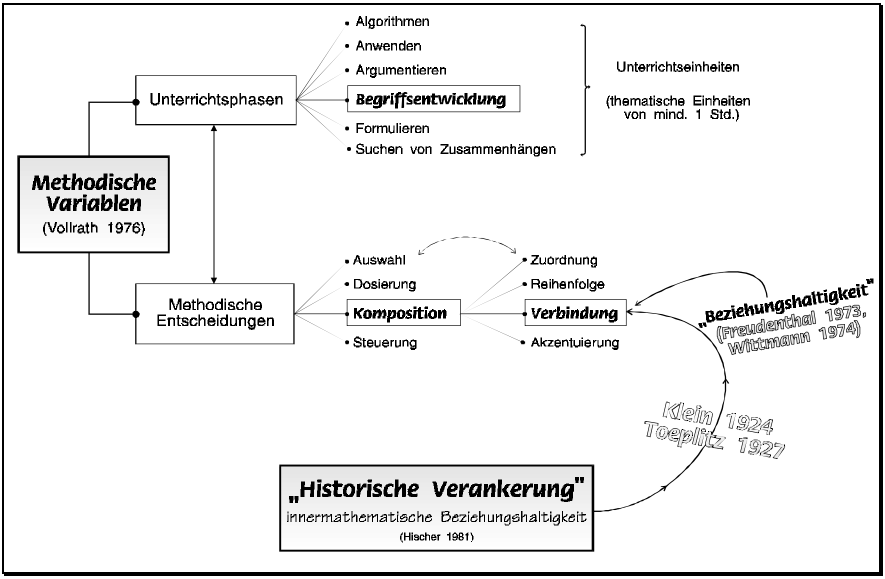

Abb. 5

Und zwar plädiere ich für die Verwendung historischer Beispiele im Unterricht, die sich als tragfähige Bausteine einer Unterrichtseinheit erweisen. Dabei sollten sie gemäß Toeplitz vom „Staub der Zeit“ befreit und in heutiger Formulierung dargestellt werden. *„Geschichte der Mathematik“* erscheint in diesem Sinne als *didaktischer Aspekt* – zugleich wird ein *Beitrag zur Kulturgeschichte* geliefert.

Fundamentale Ideen der Mathematik als curriculare Strukturierungshilfe

Falls man sich meiner These anschließt, daß es sich bei der Mittelwertbildung um eine fundamentale Idee handelt und falls man dann weiterhin geneigt ist, das Konzept der fundamentalen Ideen im Sinne der normativen Forderungen auch als curriculare Strukturierungshilfe für den Mathematikunterricht zu prüfen, so entsteht sogleich die Frage nach weiteren fundamentalen Ideen oder gar nach den fundamentalen Ideen schlechthin. Die Literatur hierzu ist eher unübersichtlich und irritierend, ja gar widersprüchlich. Die neuesten Überlegungen hierzu stammen von Hans-Werner Heymann, der insgesamt *sechs solcher fundamenter Ideen* angibt, die er „zentrale Ideen“ nennt:

Die *Idee*

der *Zahl*,
des *Messens*,
des *funktionalen Zusammenhangs*,
des *räumlichen Strukturierens*,
des *Algorithmus* und
des *mathematischen Modellierens*.

Es ist plausibel, daß diese sechs Ideen die drei deskriptiven Kriterien für fundamentale Ideen erfüllen. Zugleich fällt auf, daß die Idee der *Mittelwertbildung* nicht in diesen Rahmen hineinpaßt. Denn offenbar ist diese Idee trotz der ihr anhaftenden Vagheit viel konkreter als die sechs Heymannschen Ideen. Andererseits erscheint sie gerade wegen ihrer Konkretheit viel unterrichtsnäher als die eher zu allgemeinen Heymannschen Ideen, die wiederum wegen ihrer Allgemeinheit und damit geringen Anzahl geeignet sind, in knapper Form grundsätzliche inhaltliche Aspekte des Mathematikunterrichts festzumachen.

Eine Lösung aus diesem Dilemma besteht in folgender

These 2:	**Es gibt fundamentale Ideen auf zumindest zwei verschiedenen Ebenen mit unterschiedlichem Konkretisierungsgrad.**

Dies könnte dann etwa folgendermaßen aussehen:

Ebene 1:	*Zahl, Messen, funktionaler Zusammenhang, räumliches Strukturieren, Algorithmus, ...*
Ebene 2:	*Mittelwert, Zahldarstellung, ..., Figur/Form/Muster, Symmetrie, ...*

Die *Listen* in diesen Ebenen sind *prinzipiell offen* zu denken, und zwischen den Ideen dieser beiden Ebenen wird noch eine vernetzende Zuordnung zu treffen sein. Im Unterricht selber könnte es dann um das ***Wecken von Grundvorstellungen*** *zu solchen Begriffen, Verfahren und Argumentationsmustern* gehen, die mit diesen Ideen zusammenhängen.

Ich schließe mit der Skizze eines mehrfach vertikal erprobten Unterrichtsgangs, um zu untermauern, wie auch die normativen Kriterien an fundamentale Ideen umgesetzt werden können.

Pythagoreische Mittelwerte *(ab Jahrgang 9, vertiefbar bis Jahrgang 13)*

Zum Einstieg im **Jahrgang 9** kann man den Schülerinnen und Schülern Abbildungen von Keilschrifttafeln zeigen, [16] die Hinweise auf recht gute sexagesimale Approximationen für $\sqrt{2}$ $(\approx 1{,}414213_5)$ liefern, z. B.

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\ \ (\approx 1{,}414212_9).$$

[16] babylonische Sammlung, Yale, YBC 7289, wiedergegeben z. B. in [Resnikoff & Wells 1983, S. 65]

Hier entsteht sogleich die Frage, wie die Babylonier so hervorragende Approximationen erhalten haben, und man kann als Lehrkraft ergänzen, daß die Keilschrifttafeln darüber zwar keine Auskunft geben, daß wir jedoch indirekt darüber Kenntnis erlangt haben:

So berichtet uns die Geschichtsschreibung, [17] daß Pythagoras von seinem Aufenthalt in Mesopotamien die Kenntnis dreier Mittelwerte mitgebracht habe, welche schon früher von den Babyloniern für ihre Berechnungen benutzt wurden, nämlich das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel. Und wie haben die Pythagoreer diese Mittelwerte beschrieben?

In heutiger Notation geben wir dazu zwei positive reelle Zahlen x und y vor mit dem Ziel, eine zwischen diesen beiden Zahlen liegende dritte Zahl m als „Mittelwert“ zu charakterisieren. Wir veranschaulichen dies durch einen Abschnitt der Zahlengeraden (vgl. Abb. 6) und bilden dann wie die Pythagoreer in ihrer Proportionenlehre Verhältnisse von Streckenlängen. Ich beschränke mich auf die Mitteilung der Ergebnisse:

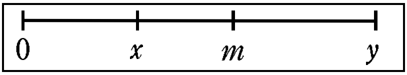

Abb. 6

Die Pythagoreer betrachteten das Streckenverhältnis $\frac{m-x}{y-m}$, das uns bereits bei dem Chuquet-Mittel begegnet ist! Dieses verglichen sie nun mit Streckenverhältnissen, die durch systematische Variation aus den drei Ausgangsstrecken gebildet wurden, nämlich mit $\frac{x}{x}$, $\frac{x}{m}$ und $\frac{x}{y}$, und so beschrieben sie der Reihe nach das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel von x und y, was man in heutiger Notation etwa wie folgt machen könnte:

(1) m ist *arithmetisches Mittel* von x und y $:\Leftrightarrow \quad \dfrac{m-x}{y-m} = \dfrac{x}{x}$ (kurz: $m =: A(x, y)$)

(2) m ist *geometrisches Mittel* von x und y $:\Leftrightarrow \quad \dfrac{m-x}{y-m} = \dfrac{x}{m}$ (kurz: $m =: G(x, y)$)

(3) m ist *harmonisches Mittel* von x und y $:\Leftrightarrow \quad \dfrac{m-x}{y-m} = \dfrac{x}{y}$ (kurz: $m =: H(x, y)$)

Als „Lösungen“ dieser drei Proportionen errechnet man leicht

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \; G(x,y) = \sqrt{xy}, \; H(x,y) = \frac{2xy}{x+y}.$$

[17] der 300 n. Chr. lebende Geschichtsschreiber Jamblichus von Chalkis, vgl. [Hischer & Scheid 1995]

Die Entdeckung der „musikalischen Proportion“ $\frac{H(x,y)}{x} = \frac{y}{A(x,y)}$ an schwingenden Saiten führte dann wohl zur Namensgebung „harmonisches Mittel“. [18]

Die Pythagoreer charakterisierten in ähnlicher Weise sieben weitere Mittelwerte (sog. „Mediäteten“), [19] indem sie systematisch die Definitionsgleichungen für die babylonischen Mittelwerte variierten:

$$\frac{m-x}{y-m} = \frac{y}{x}, \quad \frac{m-x}{y-m} = \frac{m}{x}, \quad \frac{m-x}{y-m} = \frac{y}{m}, \quad \frac{m-x}{y-x} = \frac{x}{m}, \quad \frac{m-x}{y-x} = \frac{x}{y}, \quad \frac{y-x}{y-m} = \frac{y}{x}, \quad \frac{y-x}{y-m} = \frac{m}{x}$$

Als „sinnvolle Lösungen“ für diese sieben weiteren „Mittelwerte“ ergeben sich der Reihe nach:

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}, \quad \frac{y-x}{2} + \sqrt{\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + x^2}, \quad -\frac{y-x}{2} + \sqrt{\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\frac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4xy - 3x^2}, \quad y - \frac{(y-x)^2}{y}, \quad x + \frac{(y-x)^2}{y}, \ \max\{\, y-x\,, x\}$$

Theoretisch lassen sich insgesamt 21 derartige Proportionen aufstellen, von denen aber einige wegen der Voraussetzung $x \le m \le y$ sinnlos sind. Einige liefern keine neuen Lösungen, und andere liefern „Lösungen“, die identisch x oder identisch y sind und denen damit die Bedeutung eines „Mittelwerts“ gar nicht zugesprochen werden kann. Dennoch gibt es eine elfte Gleichung, welche merkwürdigerweise von den Pythagoreern nicht angegeben wird, obwohl sie eine neue Lösung und damit einen elften Mittelwert liefert, der über Proportionen erklärt ist, nämlich

$$\frac{y-x}{y-m} = \frac{y}{m}$$

mit der Lösung $\frac{y^2}{2y-x}$. All dies ist im Unterricht von Jahrgang 9 behandelbar.

Man sollte den Schülerinnen und Schülern an dieser Stelle aber nicht vorenthalten, welch schöne Entdeckung der im 3. Jahrhundert n. Chr. lebende *Pappus von Alexandria* am Kreis machte (Abb. 7): [20]

$$x < y \quad \Rightarrow \quad x < H(x,y) < G(x,y) < A(x,y) < y \qquad (*)$$

---

18 oder auch die „Harmonie“ der Würfeldaten (Ecken e, Flächen f, Kanten k), welche die Gleichung $H(f, k) = e$ erfüllen (vgl. [Boyer 1968] und [Hischer & Scheid 1995])

19 vgl. [Boyer 1968]

20 vgl. [Hischer & Scheid 1995]

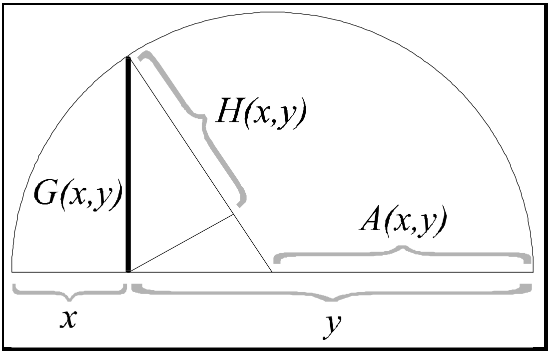

Abb. 7

Zum Beweis braucht man nur die Dreieckssätze von Euklid für rechtwinklige Dreiecke, und so ergibt sich für den Unterricht nicht nur eine weitere historische Verankerung, sondern auch eine schöne Verknüpfung zur Geometrie.

Daß man die Namensgebungen *„arithmetisches Mittel"*, *„geometrisches Mittel und „harmonisches Mittel"* im Unterricht historisch begründet, sollte selbstverständlich sein, und man kann die Schülerinnen und Schüler weitere Funktionaleigenschaften dieser Mittelwertfunktionen entdecken lassen, insbesondere:

$$G(A(x,y), H(x,y)) = G(x,y)$$

In Verbindung mit der Ungleichungskette (*) erhält man daraus den *Babylonischen Algorithmus,* nämlich eine Intervallschachtelung zur Approximation von Quadratwurzeln, und damit lassen sich die babylonischen Sexagesimalapproximationen bestätigen:

WÄHLE $r > 0$	
WÄHLE $\varepsilon > 0$	
WÄHLE $x, y > 0$ mit $x < y$ und $xy = r$	
WIEDERHOLE	$z := H(x,y)$ $y := A(x,y)$ $x := z$
BIS $y - x < \varepsilon$	
AUSGABE approx($\sqrt{r}$, ε):=$A(x,y)$	

Abb. 8

Wegen $A(x,y) - x = \frac{1}{2}(y-x) > 0$, $H(x,y) < A(x,y)$ und $x < H(x,y)$ ist nämlich

$$0 < A(x,y) - H(x,y) < \tfrac{1}{2}(y-x), \quad (**)$$

und somit ist durch obige Ungleichungskette (**) ein (abbrechender) Algorithmus gegeben, nämlich der *Babylonische Algorithmus zur Quadratwurzelapproximation* (Abb. 8). Zu Ehren der Babylonier bezeichne ich die Ungleichungskette (*) als *„babylonische Ungleichungskette"*, weil sie ja die mathematische Grundlage für den von ihnen benutzten Algorithmus bildet.

Im **Jahrgang 10** steht in der Regel die Behandlung der Kreiszahl π nebst ihrer Approximation an. Im Sinne historischer Verankerung sollte man auf bedeutsame Stationen der Berechnung von π eingehen:

Erste systematische Approximationen der Kreiszahl π verdanken wir bekanntlich Archimedes (287 bis 212 v. Chr.), wenngleich uns durch den Papyrus Rhind, den der Schreiber Ahmes verfaßt hat, ägyptische Näherungswerte bekannt sind, die ca. 4000 bis 5000 Jahre alt sind. [21] Archimedes verwendete bekanntlich bereits Intervallschachtelungen, indem er — in heutiger Sichtweise — rekursiv definierte Folgen ein- und umbeschriebener n-Ecke betrachtete und der Rekursionsschritt in der Eckenanzahlverdoppelung bestand. Das Verfahren ist allgemein bekannt, numerisch aufwendig, und Archimedes vermied bereits — wie ebenfalls bekannt ist — durch geschickte Termumformung das Auftreten einer „Nullkatastrophe“. [22] Bezeichnen wir den Umfang des einbeschriebenen n-Ecks mit E_n und den des umbeschriebenen n-Ecks mit U_n, so gelten bekanntlich die in Abb. 9 aufgeführten rekursiven Beziehungen.

$$E_{2n} = \frac{2E_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-\left(\frac{E_n}{n}\right)^2}}} > E_n$$

$$U_{2n} = \frac{4U_n}{2+\sqrt{4+\left(\frac{U_n}{n}\right)^2}} < U_n$$

Abb. 9

Diese Gleichungen bzw. Ungleichungen lassen sich durch elementargeometrische Betrachtungen an rechtwinkligen Dreiecken herleiten, und sie begründen einen entsprechenden *Algorithmus zur Approximation von* 2π. Man sollte historisch würdigen, daß Archimedes beim Start mit einem Sechseck die Approximation bis zum 96-Eck getrieben hat. Für uns ist es ein Leichtes, mittels eines Computers diesen Algorithmus „beliebig weit“ im Rahmen des numerisch Möglichen abzuarbeiten, jedoch bei Verwendung eines nicht-programmierbaren Taschenrechners entsteht eine spürbare Belastung!

Im Mathematikunterricht wird üblicherweise dieses Verfahren von Archimedes verwendet (falls man sich überhaupt Mühe gibt, ein historisches Verfahren zu benutzen). Im Sinne historischer Verankerung sollte man aber vor allem auf den bedeutsamen neuzeitlichen *Algorithmus von James Gregory* (1638 bis 1675) eingehen, der bisher in Schulbüchern leider noch keine Rolle spielt. Und zwar betrachtete dieser wie Archimedes regelmäßige n-Ecke (nicht nur an Kreisen, sondern sogar an Kegelschnitten!), die er — wie dieser — durch systematische Eckenanzahlverdoppelung verfeinerte. Dabei stieß Gregory auf folgenden elementaren Zusammenhang, den ich hier für die Umfänge von ein- und umbeschriebenen n-Ecken vorstelle: [23]

$$U_{2n} = H(E_n, U_n) \quad \text{und} \quad E_{2n} = G(E_n, U_{2n})$$

---

[21] vgl. [Boyer 1968] und [Hischer & Scheid 1995, S. 20]

[22] vgl. [Hischer & Scheid 1995]

[23] vgl. [Boyer 1968], [Hischer 1994 c] und [Hischer & Scheid 1995]

Der Kreis wird deshalb auch *harmonisch-geometrisches Mittel* dieser beiden Polygonfolgen genannt. [24] (Es muß nachdrücklich darauf hingeweisen werden, daß in der zweiten Rekursion U_{2n} und nicht U_n steht!)

Diese beiden auf diese Weise rekursiv verschachtelt definierten Folgen liefern einen äußerst eleganten Algorithmus zur Approximation von π, der in informatischer, folgenfreier Notation in Abb. 10 dargestellt ist. Er ist strukturell einfacher als der babylonische Algorithmus, konvergiert allerdings nicht so schnell wie dieser, ist andererseits ablaufäquivalent mit dem archimedischen Algorithmus und zugleich numerisch weitaus einfacher zu handhaben als dieser. Wie beim babylonischen Algorithmus ergibt sich auch hier die Konvergenz des Verfahrens und damit das Vorliegen einer Intervallschachtelung $\langle [E_n, U_n] \rangle$ für 2π aus der babylonischen Ungleichungskette (*).

$E := 6;\ U := 4 \cdot \sqrt{3}$	
WÄHLE $\varepsilon > 0$	
WIEDER-HOLE	$U := H(E,U)$
	$E := G(E,U)$
BIS $U - E < \varepsilon$	
AUSGABE $\operatorname{approx}(\pi,\varepsilon) := \frac{1}{2} A(E,U)$	

Abb. 10

Die obigen „Gregory-Rekursionen“ lassen sich elementargeometrisch nur mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen erschließen, sie sind damit also im Mathematikunterricht von Jahrgang 9 (!) behandelbar. [25] Hiermit werden die Begriffe „Folge“, „Algorithmus“, „Iteration“ und „Approximation“ vorbereitet, und all dies kann in der Oberstufe weiter vertieft werden. Ein einfacher, altersgemäßer Weg zur Entdeckung dieser Gregory-Rekursionen ergibt sich aus Abb. 11. Ein Schritt der Eckenanzahlverdoppelung ist zwar hier für n=4 dargestellt, aber man möge sich klar machen, daß die folgende Argumentation dennoch o. B. d. A. gilt:

Mit e_n bzw. e_{2n} sind die Seitenlänge des einbeschriebenen n-Ecks bzw. $2n$-Ecks bezeichnet, entsprechend mit $\frac{1}{2}u_n$ bzw. $\frac{1}{2}u_{2n}$ die *halbe* Seitenlänge des umbeschriebenen n-Ecks bzw. $2n$-Ecks. Sodann lassen sich aufgrund von Ähnlichkeitsbeziehungen folgende Gleichungen aus der Zeichnung ablesen:

$$(1)\quad \frac{e_n}{\frac{1}{2}u_n} = \frac{u_{2n}}{\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{2n}}, \qquad (2)\quad \frac{e_n}{e_{2n}} = \frac{e_{2n}}{\frac{1}{2}u_{2n}}$$

---

[24] vgl. [Cantor 1900]

[25] Es ist allerdings historisch anzumerken, daß Gregory die *Flächeninhalte* der ein- und umbeschriebenen Polygone betrachtete, während Archimedes ja *Umfangs*untersuchungen durchführte. Obige Rekursionen gelten aber ebenfalls, wenn mit E_n und U_n die entsprechenden Flächen*inhalte* bezeichnet werden.

Da es unser Interesse sein muß, die Größen des $2n$-Ecks auf die des n-Ecks zurückzuführen, in (1) nur u_{2n} vorkommt, in (2) hingen e_{2n} und u_{2n} vorkommen, ergibt sich als Strategie, (1) nach u_{2n} aufzulösen und (2) nach e_{2n}. Dabei erhalten wir durch Äquivalenzumformung:

$$u_{2n} = \frac{e_n \cdot u_n}{e_n + u_n}, \quad e_{2n}{}^2 = \tfrac{1}{2} e_n \cdot u_{2n}$$

Unter Berücksichtigung von $U_n = n \cdot u_n$ und $E_n = n \cdot e_n$ ergeben sich hieraus die Gregroy-Rekursionen. Es ist erstaunlich, daß diese verblüffend einfach herzuleitenden Beziehungen bisher im Mathematikunterricht kaum eine Rolle spielen.

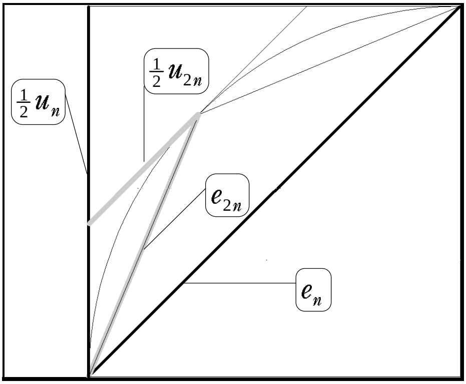

Abb. 11

Schlußbemerkung

Auf diverse andere Beispiele und Möglichkeiten zum Auftreten von Mittelwerten im Mathematikunterricht, etwa in der Geometrie oder Stochastik, kann ich hier nicht eingehen. [26] Vielmehr wollte ich am Beispiel der phythagoreischen Mittelwerte exemplarisch verdeutlichen, daß „**fundamentale Ideen**“ tatsächlich hilfreich sein können, den Unterricht inhaltlich zu strukturieren, ohne jedoch stets explizit im Vordergrund stehen zu müssen. Zusätzlich wollte ich an diesem **Beispiel der Mittelwertbildung** hervorheben, daß es wichtig und nützlich sein kann, kulturhistorische Aspekte der Entstehung von Begriffen, Problemen und Ideen in den Unterricht einfließen zu lassen und damit eine „**historische Verankerung**“ zu organisieren, wodurch insbesondere die **historische Dimension der einzelnen fundamentalen Idee** unterrichtswirksam wird.

Literatur

Boyer, Carl B. [1968]: A History of Mathematics. New York: John Wiley & Sons.

Bruner, Jerome S. [1970]: Der Prozeß der Erziehung. Düsseldorf/Berlin: Schwann (1. Auflage).

Cantor, Moritz [1900]: Geschichte der Mathematik. Band 2. Leibzig: Teubner.

---

[26] vgl. etwa [Winter 1985] und dort auch [Führer 1985]

Führer, Lutz [1985]: Welche Vierecke haben einen „Mittelpunkt“? In: [Winter 1985, S. 38 – 43].

Herget, Wilfried [1985]: Zoo der Mittelwerte. In: [Winter 1985, S. 50 – 51].

Hischer, Horst [1981]: „Historische Verankerung“ als methodische Variante im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht (Tagungsband 1981), S. 43.

— [1994 a]: Mittelwerte, Algorithmen und Folgen – ein Beispiel beziehungshaltigen Unterrichts durch „historische Verankerung“. In: Müller, K. P. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1994 (Tagungsband). Hildesheim: Franzbecker, S. 147 – 150.

— [1994 b]: Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (1): Entdeckung der Irrationalität am Pentagon – ein Beispiel für den Sekundarbereich I. In: *Mathematik in der Schule*, **32**(1994)4, S. 238 – 248.

— [1994 c]: Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (2): Lösung klassischer Probleme mit Hilfe von Trisectrix und Quadratrix – ein Beispiel für die gymnasiale Oberstufe. In: *Mathematik in der Schule*, **32**(1994)5, S. 279 – 291.

Hischer, Horst & Scheid, Harald [1995]: Grundbegriffe der Analysis – Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Jahnke, Thomas [1993]: Das Simpsonsche Paradoxon verstehen – ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **14**(1993)3/4, S. 221 – 242.

Meyer, Jörg [1994]: Über einige Paradoxa aus der Stochastik. In: Müller, K. P. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1994. Hildesheim: Franzbecker, S. 239 – 242.

Resnikoff, Howard L. & Wells, R. O., jr. [1983]: Mathematik im Wandel der Kulturen. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Schweiger, Fritz [1992]: Fundamentale Ideen – eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **13**(1992)2/3, S. 199 – 214.

Tietze, Uwe-Peter & Klika, Manfred & Wolpers, Hans [1982]: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig: Vieweg.

Tietze, Uwe-Peter & Klika, Manfred & Wolpers, Hans [1997]: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis. Braunschweig: Vieweg.

Toeplitz, O. [1927]: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. Jahresbericht der DMV **36**(1927), S. 90 – 100.

Vollrath, Hans-Joachim [1976]: Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht. In: *Der Mathematikunterricht* **22**(1976)5, S. 7 – 24.

Winter, Heinrich (Hrsg.) [1985]: Themenheft „Mittelwerte“. *mathematik lehren*, (1985)8.

Wittmann, Erich [1974]: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg (1. Auflage).