

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung: Mathematik, Medien, Bildung – Medienbildung?</b>	<b>1</b>
----------	---	----------

## Teil I: Theorie

<b>2</b>	<b>Bildungstheoretische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Bildung und Allgemeinbildung	7
2.1.1	Prolog: wider den Zeitgeist	7
2.1.2	Zur Genese des Bildungsbegriffs im deutschen Sprachraum	8
2.1.3	Zum heutigen Verständnis von Allgemeinbildung	14
2.1.4	Offenheit und Unterrichtsziele vs. Lernziele	17
2.1.5	Inhalt, Thema, Unterrichtsinhalt, Bildungsinhalt und Bildungsgehalt	18
2.2	Mathematikunterricht und Allgemeinbildung	19
2.2.1	Zur Leitposition der wissenschaftlichen Didaktik der Mathematik	19
2.2.2	Wittenberg: Bildung und Mathematik	20
2.2.3	Heymann: Thesen zu einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht	23
2.2.4	Winter: Grunderfahrungen für eine mathematische Allgemeinbildung	25
2.2.5	Mathematik – Anwendung – Spiel – Irrtum	26
2.3	Technik und Technologie	30
2.4	Didaktik oder Methodik? – Methodik als Teil der Didaktik!	33
2.5	„Kompetenzen“? – ein kritisch-konstruktiver Einwurf	35
2.6	Am Rande: Bildung und Wissen – Bildung ist das Paradies!	41
<b>3</b>	<b>Medien im didaktischen Kontext</b>	<b>45</b>
3.1	Medien, Kultur und Enkulturation	45
3.1.1	„Medien“ im naiven umgangssprachlichen Verständnis	45
3.1.2	Kron: „Medium“ im bildungswissenschaftlichen Verständnis	47
3.1.3	„Kultur“ in naiver und philosophischer Sicht	48
3.1.4	Kulturtechniken	52
3.1.5	Herskovits & Loch: „Kultur“ im bildungswissenschaftlichen Verständnis	54
3.1.6	Enkulturation: Didaktik als Enkulturationswissenschaft	55
3.1.7	„Medium“ als Umgebung	56
3.2	„Medium“ als <i>Genus verbi</i> im Griechischen	59
3.3	Medien als Werkzeuge zur Weltaneignung und als künstliche Sinnesorgane	62
3.4	Medien im didaktischen Kontext: „mediale Aspekte“	64
3.5	Medien: enge Auffassung versus weite Auffassung	65
3.6	Ein Blick auf aktuelle technische Medien	67
3.7	Neue Medien	68
3.8	Medien im Unterricht als Werkzeug oder als Hilfsmittel?	69

3.9	Medienpädagogik	70
3.10	Integrative Medienpädagogik	72
3.11	Medien als Unterrichtsmittel oder als Unterrichtsinhalt?	75
3.12	Medienbildung – Schlagwort oder Bildungskonzept?	77
3.13	„Medienbildung“ als „Integrative Medienpädagogik“	79
3.14	Rückblick und Ausblick aus medienphilosophischer Sicht	82
<b>4</b>	<b>Medialitätsbewusstsein (Wolf-Rüdiger Wagner)</b>	<b>85</b>
4.1	Prolog	85
4.2	Medien – Medialitätsbewusstsein – Medienbildung	92
4.3	Zur generellen Medialität unserer Weltzugänge	95
4.4	Medien als künstliche Sinnesorgane	95
4.5	Medien als „Kulturtechniken“	97
4.6	Kulturtechniken und Generierung von Wissen	102
4.7	Mediengenerativismus versus Medienmarginalismus	103
4.8	Medialität	105
4.8.1	Alltagswirklichkeit versus Medienwirklichkeit	105
4.8.2	Medialität als „sinmitemzeugendes“ Potential	106
4.8.3	„Sinn“ ist immer an eine mediale Form gebunden	108
4.8.4	„Nur in der Prozessualität eines Vollzugs ist etwas überhaupt ein Medium“	109
4.8.5	Geräte und Verfahren werden zu Medien, indem sie Programme zur Aneignung von Welt unterstützen	112
4.8.6	Medien entfalten ihr Potential im Zusammenwirken von Geräten und Verfahren	115
4.9	Relevanz der Medialitätsforschung für die Medienbildung	116
4.9.1	„Wissensbilder“	117
4.9.2	Graphische Darstellungen als Evidenzerzeuger	118
4.9.3	Leitmedien und ihr kulturprägendes Potential	119
4.10	Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel	121
4.11	Fazit	123

## Teil II: Beispiele

<b>5</b>	<b>Mathematik und Medien – Vorbetrachtungen</b>	<b>129</b>
5.1	Mediale Aspekte	129
5.2	Mathematikunterricht und Medialitätsbewusstsein	130
5.3	Mathematik als Medium im historischen Kontext	134
5.3.1	Mathematik zwischen Anwendung und Spiel	134
5.3.2	Mathematik als Medium	135
5.3.3	Mathematik, Medien und Bildung im historischen Kontext	138

<b>6</b>	<b>Neue Medien</b>	141
6.1	Neue Medien als Auslöser der Diskussion um Medienbildung	141
6.2	Funktionenplotter	142
6.2.1	Zur Geschichte der Funktionenplotter	142
6.2.2	Zur Struktur von Funktionenplottern	144
6.2.3	Funktionsplots termbasierter Funktionen	145
6.2.4	Überlagerungsphänomene bei periodischen Strukturen	148
6.2.5	Aliasing bei Funktionenplottern	153
6.2.6	Elementare Sätze über Funktionenplotter	156
6.2.7	Merkwürdiges: die „Hauptsätze für Funktionenplotter“	157
6.3	Computeralgebrasysteme	160
6.3.1	Zur Struktur von Computeralgebrasystemen	160
6.3.2	Computeralgebrasysteme und Mathematikunterricht	165
6.4	Tabellenkalkulationssysteme	171
6.4.1	Überblick	171
6.4.2	Historische Anmerkungen	172
6.4.3	Zur Struktur von Tabellenkalkulationssystemen	173
6.4.4	Beispiele zur Verwendung von Rechenblättern	173
6.5	Bewegungsgeometriesysteme – Dynamische Geometrie	178
6.5.1	Vorbemerkung	178
6.5.2	Historische Aspekte	179
6.5.3	Typische Eigenschaften	180
6.6	Internet und World Wide Web (WWW)	180
6.6.1	Historische Aspekte	180
6.6.2	Zur Struktur	181
6.6.3	Recherchemöglichkeiten	181
6.7	Anthropomorphisierende Aspekte als „Medialität“	182
6.7.1	Vorbemerkung	182
6.7.2	Beispiele	183
<b>7</b>	<b>Funktionen als Medien</b>	191
7.1	Funktionen und Medienbildung	191
7.2	Zum aktuell nicht einheitlichen Verständnis von „Funktion“	193
7.3	Funktionen haben viele Gesichter	194
7.4	Zeittafel zur Entwicklung des Funktionsbegriffs	196
7.5	Funktionen als Tabellen bei den Babyloniern	197
7.6	Zur Dominanz zeitachsenorientierter Funktionen seit etwa 1000 n. Chr.	199
7.6.1	Klosterschule: Darstellung des Zodiaks in einem Koordinatensystem	200
7.6.2	Guido von Arezzo: Begründer der Notenschrift	203
7.6.3	Nicole d’Oresme: geometrische Darstellung zeitabhängiger Funktionen	205
7.7	Empirische Funktionen im Vorstadium formaler Begriffsentwicklung	208

7.7.1	Überblick	208
7.7.2	1551 Rheticus: erste trigonometrische Tabellen	209
7.7.3	1614 John Napier: erste „Logarithmentafeln“?	210
7.7.4	1662 John Graunt: erste demographische Statistik	212
7.7.5	1669 Christiaan Huygens: „Lebenslinie“ und „Lebenserwartungszeit“	213
7.7.6	1686 Edmund Halley: Luftdruckkurve	213
7.7.7	1741 / 1761 Johann Peter Süßmilch: geistiger Vater der Demographie	214
7.7.8	1762 / 1779 Johann Heinrich Lambert: Langzeittemperaturmessungen	215
7.7.9	1786 / 1821 William Playfair: Datenvisualisierung durch Charts	219
7.7.10	1795 / 1797 Louis Ézéchiél Pouchet: Nomogramme	220
7.7.11	1796 James Watt & John Southern: Dampfmaschine und Kreisprozess	220
7.7.12	1817 Alexander von Humboldt: erstmals geographische Isothermen	221
7.7.13	1821 Jean Baptiste Joseph Fourier: Häufigkeitsverteilung	221
7.8	Beginn der expliziten Begriffsentwicklung von „Funktion“	222
7.8.1	Überblick	222
7.8.2	1671 Isaac Newton: Fluxionen und Fluenten	222
7.8.3	1673 / 1694 Gottfried Wilhelm Leibniz: erstmals das Wort „Funktion“	223
7.8.4	1706 / 1718 Johann I. Bernoulli: erstmals Definition von „Funktion“	224
7.8.5	1748 Leonhard Euler: erstmals „Funktion“ als grundlegender Begriff	225
7.9	Entwicklung zum modernen Funktionsbegriff seit Anfang des 19. Jhs.	227
7.9.1	1822 Jean Baptiste Fourier: erste termfreie Definition von „Funktion“	227
7.9.2	1829 / 1837 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet: termfreier Funktionsbegriff	228
7.9.3	1875 Paul Du Bois-Reymond: Funktion als Tabelle	231
7.9.4	1887 Richard Dedekind: Abbildung als eindeutige Zuordnung	232
7.9.5	1891 Gottlob Frege – Präzision: <i>Funktion, Argument, Funktionswert</i>	233
7.9.6	Ende 19. Jh. Peirce, Schröder, Peano: erstmals Funktion als Relation	235
7.9.7	1903 – 1910 Russell, Zermelo, Whitehead: Annäherung an „Relation“	235
7.9.8	1914 Felix Hausdorff: mengentheoretische Definition von „Funktion“ als „Relation“	236
7.9.9	Funktion und Funktionsgraph: eine kuriose Konsequenz	237
7.10	„Gesichter“ von Funktionen: ungewöhnliche Beispiele	238
7.10.1	Vorbemerkungen	238
7.10.2	Bilder als Funktionen – Sichtbare Funktionen	239
7.10.3	Funktionsplotter, Funktionsplots und Schaubilder von Funktionen	239
7.10.4	Scanner als materialisierte Funktion: Diskretisierung und Digitalisierung	240
7.10.5	Hörbare Funktionen	241
7.10.6	Funktionsplotter, Kameras, Projektoren und Filme als Funktionen	244
7.11	Fazit	245
<b>8</b>	<b>Zur Medialität mathematischer „Probleme“ am Beispiel der „drei klassischen Probleme“</b>	249
8.1	Die drei Probleme in früher schulbezogener Literatur	249
8.2	Überblick zur Behandlung der drei Probleme in der Antike	251
8.2.1	Problemskizzen	251

8.2.2	„Konstruktion mit Zirkel und Lineal“ in medialer Sicht	253
8.2.3	Zur Entstehung der drei klassischen Probleme in der Antike	255
8.2.4	Exakte Lösungen vs. Näherungslösungen?	259
8.3	Gemeinsamkeiten und Unterschiede der drei Probleme	260
8.3.1	Strukturelle Aspekte	260
8.3.2	Mediale Aspekte	262
8.4	Dreiteilung eines Winkels	263
8.4.1	Ausgangslage: Strahlensatz ist nicht direkt anwendbar	263
8.4.2	Lösungswerkzeug: die Trisectrix des Hippias von Elis	263
8.4.3	Lösungswerkzeug: die Archimedische Spirale	264
8.4.4	Lösungswerkzeug: das „Einschiebelineal“ des Archimedes	266
8.4.5	Lösungswerkzeug: die Muschellinie des Nikomedes	268
8.5	Verdoppelung des Würfels	270
8.5.1	Grundidee: Ermittlung von zwei mittleren Proportionalen	270
8.5.2	Lösungsweg: mechanische Einschiebung	273
8.5.3	Lösungsweg: die „krumme Linie“ des Archytas von Tarent	278
8.5.4	Lösungsweg: die Muschellinie (Konchoïde) des Nikomedes	281
8.5.5	Lösungsweg: das Mesolabium des Eratosthenes	282
8.5.6	Lösungsweg: Schnittpunkt von zwei Kegelschnitten nach Menaichmos	284
8.5.7	Lösungsweg: Schnittpunkt von Parabel und Kreis nach Descartes	286
8.6	Quadratur des Kreises	287
8.6.1	Lösungswerkzeuge: die Trisectrix als Quadratrix, Satz des Dinostratos	287
8.6.2	Lösungswerkzeug: die Archimedische Spirale	289
8.7	Ergänzungen	291
8.7.1	Zur „Neusis“ als Lösungsmethode	291
8.7.2	Konstruktion mit Zirkel und Lineal: <i>theoretische Geometrie vs. praktische Geometrie</i>	295
8.7.3	Vertiefung: exakte Lösungen vs. Näherungslösungen	299
8.7.4	19. Jahrhundert: die endgültige Lösung der drei klassischen Probleme	302
8.7.5	Zusammenfassung	303
8.8	Fazit	306
<b>9</b>	<b>Weitere mediale Aspekte in der Mathematik</b>	<b>309</b>
9.1	Visualisierungen	309
9.1.1	„Visualisierung“ – was ist das eigentlich?	309
9.1.2	Visualisierungen in der Mathematik	310
9.1.3	Beweise ohne Worte	312
9.1.4	Figurierte Zahlen	314
9.1.5	Illusionen durch Visualisierung unmöglicher Figuren	317
9.1.6	Optische Täuschungen	320
9.2	Historische Werkzeuge der Mathematik	321
9.2.1	Vorbemerkung	321
9.2.2	Mechanische Instrumente zum Zeichnen, Messen und Rechnen	322
9.2.3	Auf dem Wege zur Entwicklung von Rechenmaschinen	323

9.2.4	Tafelwerke	325
9.2.5	Rechenschieber	327
9.2.6	Mathematische Papiere	328
9.3	Formale Aspekte	331
9.3.1	Vorbemerkung	331
9.3.2	Variablen, Logik und Mengen	331
9.3.3	Algorithmen und Kalküle	333
9.3.4	Axiome, Strukturen und Modelle	339
9.4	Mathematik, Sprache und Logik	356
9.5	Fazit	358
<b>10</b>	<b>Vernetzung als Medium zur Weltaneignung</b>	<b>359</b>
10.1	Einleitung	359
10.2	Kleine Welten und Netzwerke	359
10.2.1	Vorbemerkung	359
10.2.2	Kleine Welten – zwei Einstiegsbeispiele und ihre (Be-)Deutung	360
10.3	Netz, Netzwerke und Vernetzung	371
10.3.1	Vorbemerkung	371
10.3.2	Alltagssprachlicher Bedeutungsumfang von „Netz“	374
10.3.3	„Netz“ in pädagogisch-didaktischer axiomatisch orientierter Sicht	376
10.3.4	Netzgraphen, Netzwerke, Vernetzung und Verzweigung	378
10.3.5	Das „Netz-Dilemma“	382
10.4	Modellierung natürlich wachsender Netzwerke	383
10.4.1	Übersicht	383
10.4.2	Das „ER-Modell“ von Erdős und Rényi (1959)	384
10.4.3	Das „WS-Modell“ von Watts und Strogatz (1998)	385
10.4.4	Das „BA-Modell“ von Barabási und Albert (1999)	387
10.4.5	Ausfallverhalten von Netzwerken: Fehlertoleranz und Stabilität	392
10.4.6	Zusammenfassung	397
10.5	Fazit: Vernetzung als Medium zur Weltaneignung	398
10.5.1	Vorbemerkung	398
10.5.2	Vernetzung, Kleine Welten und Mathematikdidaktik: Grundsätzliches	398
10.5.3	Kleine Welten, BA-Modell und „vernetzender Unterricht“	400
10.5.4	Kleine Welten, Netzwerke: Anregungen für den Mathematikunterricht	403
10.5.5	Pädagogische Aspekte: soziale Netzwerke	404
10.5.6	Zusammenfassung	407
<b>11</b>	<b>Nachwort</b>	<b>409</b>
<b>12</b>	<b>Literatur</b>	<b>415</b>
<b>13</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>441</b>
<b>14</b>	<b>Register</b>	<b>445</b>