7 Ergänzungen

7.1 Zur „Neusis“ als Lösungsmethode

Bild 7.1 zeigt die *Lösungsstellungen* der Winkeldreiteilung sowohl mit dem „Einschiebelineal“ (Bild 4.9 in Abschnitt 4.4: Archimedes) als auch mit der „Konchoïde“ (Bild 4.13 in Abschnitt 4.4: Nikomedes), wobei die Figur aus Bild 4.13 hier um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht ist. Sodann zeigt sich spätestens jetzt eine vielleicht überraschende Gemeinsamkeit beider Figuren: [92]

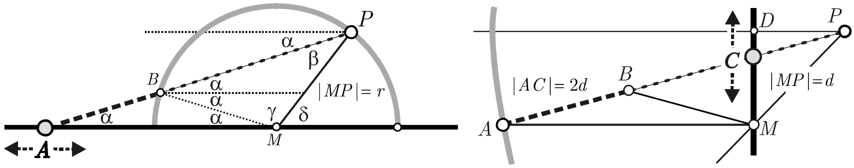

Bild 7.1: Verdeutlichung desselben Prinzips in Bild 4.9
und (einem um 90° gedrehten Ausschnitt von) Bild 4.13

In beiden Fällen liegt ein fester Punkt P als „Pol“ vor, und ein beweglicher Punkt kann auf einer gegebenen Geraden mit nur einem Freiheitsgrad bewegt werden – links Punkt A und rechts Punkt C. Dabei ist links A so zu positionieren, dass auf der Verbindungsgeraden $\langle AP \rangle$ (also der Trägerin des „Einschiebelineals“, vgl. Bild 4.10 auf S. 24) der fixierte Punkt B auf dem Kreis zu liegen kommt, und rechts ist C so zu positionieren, dass das Lot vom Konchoïden-Punkt A auf die Gerade $\langle CM \rangle$ durch den vorgegebenen Punkt M läuft.

Hieran kann das *„***Neusis***“* genannte Prinzip erläutert werden, dass schon auf S. 22 im Zitat von Felgner zu Fußnote 42 als *„ausgerichtete Einschiebung“* erwähnt wird: Heath widmet in der Einleitung seines Werks diesem Thema ein 23 Seiten umfassendes eigenes Kapitel mit dem Titel “On the Problems known as ΝΕΥΣΕΙΣ”. [93]

Im Vorwort erwähnt Heath, dass er sich eigentlich wegen des Umfangs dieses Kapitels zu rechtfertigen gedenke, weil dieser über das Notwendige dessen hinausgehe, was zu einer „Aufhellung“ von Archimedes‘ Werk beitragen könne. Gleichwohl sei der Inhalt dieses Kapitels aber für sich genommen sehr interessant, und es vervollständige seine Untersuchungen zu Apollonios und Archimedes. [94] Auf der ersten Seite dieses Kapitels stellt er dann zunächst fest, dass es schwer sei, das griechische Wort „Neusis“ zufriedenstellend zu übersetzen, dass es aber mit Hilfe der Anmerkungen von Pappos zu den Büchern des Apollonios inhaltlich erschließbar sei:

---

[92] Nach einem Hinweis von Ulrich Felgner.
[93] [Heath 1897, c ff.], in [Heath 1914, 94 ff.] in deutscher Übersetzung.
[94] [Heath 1897, viii] und [Heath 1914, VI].

> The word *νεῦσις*, commonly *inclinatio* in Latin, is difficult to translate satisfactorily, but its meaning will be gathered from some general remarks by Pappus having reference to the two Books of Apollonius entitled *νεύσεις* (now lost). Pappus says, "A line is said to *verge* (*νεύειν*) towards a point if, being produced, it reach the point," […].

In der deutschen Übersetzung [Heath 1914, 94] heißt es:

> Das Wort *νεῦσις*, lateinisch gewöhnlich *inclinatio*, befriedigend zu übersetzen ist schwer, aber seine Bedeutung läßt sich aus einigen allgemeinen Bemerkungen bei Pappus entnehmen, die sich auf die zwei (jetzt verlorenen) Bücher des Apollonius mit dem Titel *νεύσεις* beziehen. Pappus berichtet: „Man sagt, eine Linie *neige sich* (*νεύειν*) gegen einen Punkt, wenn sie verlängert durch den Punkt geht," und gibt unter besonderen Fällen des allgemeinen Problems die folgenden an.

Gemäß dieser Übersetzung „neigt sich" eine Linie einem Punkt zu, wenn sie (ggf. nach Verlängerung) [95] durch diesen Punkt verläuft. Statt *„neigt sich ... einem Punkt zu"*, sei dies nun treffender durch *„in Richtung eines gegebenen Punktes zeigt ..."* beschrieben. Heath erläutert das dann anhand zweier Beispiele:

> "Two lines being given in position, to place between them a straight line given in length and verging towards a given point."

Das heißt: Zu zwei „positionierten Linien" ist eine Strecke gegebener Länge so zu platzieren, dass sie *in Richtung eines gegebenen Punktes* zeigt. Was „Linien" sind, bleibt hier noch offen, es können Geraden sein, aber prinzipiell auch andere „Kurven" wie im zweiten Beispiel:

> "If there be given in position (1) a semicircle and a straight line at right angles to the base, or (2) two semicircles with their bases in a straight line, to place between the two lines a straight line given in length and verging towards a corner (*γωνίαν*) of a semicircle." [96]
>
> Thus a straight line has to be laid across two lines or curves so that it passes through a given point and the intercept on it between the lines or curves is equal to a given length.

Eine Gerade ist also so durch zwei „Linien" (das können Geraden oder „Kurven" – meist wohl Kreisbögen – sein) zu legen, dass sie 1. durch *einen gegebenen Punkt* verläuft und 2. der dabei entstehende Geradenabschnitt eine *vorgegebene Länge* hat.

In der 1896 erschienenen deutschen Übersetzung zu „Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum" von Hieronymous Georg Zeuthen wird wohl erstmals im Deutschen das Wort „Einschiebung" in diesem Kontext verwendet, dem u. a. der „Zwölfte Abschnitt" gewidmet ist:

---

[95] Die Formulierung „ggf. nach Verlängerung" folgt dem Duktus der Übersetzung in [Heath 1914, 94].

[96] Heath übersetzt das griechische *γωνίαν* („gonian") mit „corner", also mit „Ecke", während in der deutschen Übersetzung seines Buches dafür „Winkel" genommen wird. Inhaltlich ist wohl in beiden Formulierung dasselbe gemeint, nämlich der von Durchmesser und Halbkreis gebildete „Eckpunkt".

> Namentlich giebt es eine bestimmte mechanische Operation, die so einfach ist und so oft von den Mathematikern des Altertums angewandt und erwähnt wird, daß man annehmen darf, die Zurückführung der Aufgaben auf dieselbe sei nicht ein bloßes Durchgangsglied zur Konstruktion durch Kegelschnitte gewesen. Dies ist die sogenannte *„ νεῦσις“*, welche im allgemeinen darin besteht, durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß zwischen zwei gegebenen Linien ein Stück von gegebener Länge abgeschnitten wird.
> In Übereinstimmung mit dieser Bedeutung wollen wir das Wort *νεῦσις* durch Einschiebung wiedergeben, nämlich Einschiebung des gegebenen Stückes zwischen die gegebenen Linien, worunter dann gleichzeitig zu verstehen ist, daß die eingeschobene Strecke oder ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punkt gehen soll. Diese Aufgabe läßt sich, wenn die eine der beiden gegebenen Linien eine Gerade ist, dadurch lösen, daß man die andere von einer Konchoide durchschneiden läßt, einer Kurve, die nach Pappus' und Eutokius' Zeugnis von Nikomedes gefunden ist [...] [97]

In einer Fußnote [98] nimmt Heath auf Zeuthens Werk kritisch Bezug und merkt an, dass hier das *Wort „Neusis“ mit „Einschiebung“ nicht passend übersetzt* worden sei, weil damit ebenso wie bei dem entsprechenden englischen Wort „insertion“ eine wesentliche Bedingung noch nicht erfasst sei:

Die betreffende „Linie“ („line“, siehe Zitate von Heath) müsse nämlich durch einen *vorgegebenen Punkt* verlaufen. Und das Wort „inclinatio“ (wie auch das griechische „neusis“) würde ferner die weitere Bedingung nicht erfassen, dass nämlich der Geradenabschnitt eine vorgegebene Länge haben müsse. [99]

Betrachten wir daraufhin die beiden in Bild 7.1 dargestellten Situationen und prüfen, ob sie in dem von Heath geschilderten Sinne als „Neusis“ interpretiert werden können:

Das zweite von Heath geschilderte Beispiel auf S. 52,

> “If there be given in position (1) a semicircle and a straight line ...”,

trifft schon in den Voraussetzungen auf keine der beiden Situationen zu, das erste Beispiel aber zunächst bezüglich dieser Voraussetzungen, sofern man „Linie“ (im naiven Sinn von „durchzeichenbar“) als eine „Kurve“ deutet.

Dazu betrachten wir nun beide dargestellte Situationen einzeln:

- **Links in Bild** 7.1

Diese Situation (bei der archimedischen Einschiebung) erfüllt auch die andere von Heath genannte Bedingung, denn die Gerade $\langle AP \rangle$ verläuft durch den gegebenen Punkt P (den „Pol“), und der „entstehende Geradenabschnitt“ zwischen

---

97 [Zeuthen 1886, 261]; der „Zwölfte Abschnitt“ findet sich in [Zeuthen 1986, 258 – 238] und trägt die Überschrift: „Körperliche Aufgaben (Fortsetzung); Einschiebungen (*νεύσεις*).“

98 [Heath 1897, c] und [Heath 1914, 94]; weitere Erörterungen zur Neusis finden sich in [Knorr 1989].

99 Der „vorgegebene Punkt“ liegt natürlich auf keiner der beiden gegebenen Linien bzw. Kurven, weil sich sonst eine triviale Lösung als Schnittpunkt mit einem Kreis dieses Radius‘ ergeben würde.

der Geraden $\langle AM \rangle$ (einer der beiden „Linien“) und dem Halbkreisbogen (der anderen Linie) hat in der Endposition die geforderte Länge $|AB|$.

Genauer gilt: Durch den „Pol“ P auf dem Kreis wird eine Gerade gelegt, die zwei weitere „Linien“ schneidet, nämlich den verlängerten Kreisdurchmesser im variablen Punkt A und den Halbkreisbogen im entstehenden Schnittpunkt B. Durch Variation der Position von A muss die erste (strichliert dargestellte) Gerade nun so um P gedreht werden, dass der Abstand von A zu B gleich dem Kreisradius r wird. Der so erhaltene Punkt B ist eindeutig, und hier liegt tatsächlich eine *Problemlösung mittels Neusis* vor.

- **Rechts in Bild** 7.1

Auch hier liegen mit der Geraden $\langle CM \rangle$ und der speziellen, zu dem vorgegebenen Winkel δ konstruierten Konchoïden zunächst zwei „Linien“ vor, außerdem ist gemäß Bild 4.13 auf S. 26 mit dem Winkel δ der Abstand $|ME| = 2d$ vorgegeben, mit dem die Konchoïde „organisch erzeugt“ wurde. [100] Nun muss die stets durch den Punkt P (den „Pol“) verlaufende Gerade $\langle PE \rangle$ [101] „nur“ so positioniert werden, dass sie durch den bereits konstruierten Punkt A läuft, weil dann – wie schon bewiesen wurde – der Strahl $[PA\rangle$ den Winkel δ drittelt. Es scheint also eine Neusis vorzuliegen.

Aber in anderer Sicht: Man bildet zunächst zum gegebenen Winkel δ, einem beliebig gewählten „Pol“ P und einem beliebig gewählten Abstand d ein rechtwinkliges Dreieck MPD mit $\sphericalangle DPM = \delta$ und der Hypotenusenlänge $|MP| = d$, und dazu wird – wie in Abschnitt 4.5 beschrieben – die zugehörige Konchoïde erzeugt. Das Lot auf die „Leitgerade“ $\langle DM \rangle$ durch M liefert mit der Konchoïden den Schnittpunkt A, der definitionsgemäß den Abstand $2d$ zur Leitgeraden hat. Erkennbar wird an keiner Stelle etwas „eingeschoben“, sondern es wird „konstruiert“: *Es liegt also keine Neusis vo*r.

- *Obwohl also mit beiden in Bild 7.1 gezeigten Verfahren eine Winkeldrittelung stattfindet, wobei sogar jeweils dieselbe Beweisidee zugrunde liegt, ist nur das archimedische Verfahren mit dem Einschiebelineal eine „Neusis“ im Sinne der Definition (und sie liefert also auch nur eine Näherungslösung!), während Nikomedes‘ Verfahren keine Neusis ist, sondern eine (exakte!) Schnittpunkt-Konstruktion mit Hilfe der Konchoïde.*

Ergänzend verdient folgender Kommentar von Heath zur „Neusis“ Beachtung: [102]

> Wir brauchen uns nur ein Lineal (oder irgendeinen Gegenstand mit gerader Kante) zu denken mit zwei Marken, deren Abstand voneinander der gegebenen Strecke gleich ist, die nach der Aufgabe von zwei Kurven auf einer durch den festen Punkt gehenden Geraden abgeschnitten werden soll; wenn dann das Lineal so bewegt wird, daß es immer durch den festen Punkt geht, während einer der markierten Punkte auf ihm

[100] Siehe hierzu den Kommentar zu Bild 4.4.
[101] Siehe Bild 4.13.
[102] [Heath 1914, 100 f.]; Hervorhebungen nicht im Original.

> dem Laufe der einen Kurve folgt, so ist es nur nötig, das Lineal so lange zu bewegen, bis der zweite Punkt auf die andere Kurve fällt. Durch ein derartiges Verfahren dürfte Nikomedes wohl zur Entdeckung seiner Kurve, der Konchoide, geführt worden sein, die er (nach Pappus) bei seiner Verdoppelung des Würfels einführte, und mit der er auch einen Winkel in drei gleiche Teile teilte (nach derselben Autorität). [...]
>
> In der Tat kann die Konchoide des Nikomedes nicht nur benutzt werden, um alle bei Archimedes erwähnten *νεύσεις* zu lösen, sondern jeden Fall einer solchen Aufgabe, wo eine der Kurven eine gerade Linie ist.

Und Felgner präzisiert diesen Sachverhalt auch als mathematisches Theorem, das hier nicht als Zitat notiert sei: [103]

- *Wenn in einer Anwendung der Neusis-Methode die eine Linie eine gerade Linie ist, dann ist die zweite Linie genau die Konchoïde.*

Dieser wichtige „Satz“ verblüfft vielleicht auf den ersten Blick, aber er ist nur eine knappe Formulierung aus der o. g. Kommentarpassage von Heath, dessen Wahrheit unmittelbar aus der Definition der Neusis folgt und der die archimedische Lösung einschließt, weil der Kreis eine spezielle Konchoïde ist.

Obwohl also Nikomedes‘ Verfahren zur Winkeldreiteilung über den Weg der Konstruktion einer Konchoïden wie dargestellt keine Neusis ist, ist die *Konchoïde für die Methode der Neusis von grundsätzlicher Bedeutung*, nämlich falls eine der beiden „Linien“ eine Gerade ist, wie Heath (unter Bezug auf Bild 4.12 von 25) in anderer Weise expressis verbis betont: [104]

> Wenn irgendein Radiusvektor von [D] nach der Kurve gezogen wird, so ist die auf ihm von der Kurve und der Geraden AB begrenzte Länge konstant. So kann jede *νεῦσις*, bei der eine der beiden gegebenen Linien eine Gerade ist, mittels des Durchschnitts der anderen Linie mit einer gewissen Konchoide gelöst werden, deren Pol der feste Punkt ist, nach dem die gesuchte Gerade sich neigen (*νεύειν*) soll. Pappus erzählt uns, daß in der Praxis die Konchoide nicht immer wirklich gezogen wurde, sondern daß „einige“ ein bequemeres Verfahren einschlugen, indem sie das Lineal um den festen Punkt drehten, bis der Abschnitt durch Probieren die gegebene Länge bekam.

7.2 Zum Problem der „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“

In der griechischen Antike wurden weitere Verfahren und Werkzeuge zur Lösung dieser drei klassischen Probleme ersonnen, und das setzte sich später auch bei den Arabern und Persern, im europäischen Mittelalter und in der Neuzeit mit vielen weiteren beeindruckenden Vorschlägen fort, wie es z. B. in den eingangs zitierten Büchlein von Rudio, Herrmann und Breidenbach angedeutet wird.

Doch was mag der Grund dafür gewesen sein, dass in der Mathematik über 2 000 Jahre lang immer weiter nach Lösungen für diese alten Probleme gesucht worden ist, wo es doch bereits eine solche Vielfalt unterschiedlicher Verfahren und Werkzeuge gab?

---

103 In einer Mitteilung an mich vom 11. 05. 2013.

104 [Heath 1914, 102]; bei Heath ist „C“ der Pol statt „D“, was hier wegen Bild 4.12 korrigiert wurde.

Eine besondere Rolle spielte bei dieser Frage immer die sog. „Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal“, wobei andererseits doch spontan klar zu sein scheint, was damit gemeint ist (es wurden aber in der bisherigen Darstellung auch „andersartige Verfahren“ erläutert, die zumindest auf den ersten Blick nichts mit „Zirkel und Lineal“ zu tun haben).

Ulrich Felgner schreibt hierzu: [105]

> Erst wenn eine Konstruktion (mit bestimmten mechanischen Hilfsmitteln) nicht gelingen will, und wenn man dann zeigen will, daß sie auch gar nicht gelingen kann, muß man sehr genau sagen, worüber man in der Geometrie überhaupt spricht und welche Begriffe dabei zur Verfügung stehen.

Diese Feststellung Felgners schließt auch die gegenteilige Situation ein, nämlich *wenn man untersuchen will, ob sie gelingen kann.*

- *Das führt zu der vielleicht überraschenden Position,*

> daß es in der Geometrie nicht um die sinnlich wahrnehmbaren Linien auf dem Papier, auf einer Tafel oder auf einem Bildschirm geht, sondern nur um ihre begrifflichen Beschreibungen [...], daß es auch schon Euklid nicht um die sinnlich wahrnehmbaren Punkte (als „Einstiche“, die mit dem „Stachelstab“ gemacht werden), mit dem Lineal gezogenen geraden Linien und den mit einem Zirkel geschlagenen Kreisen ging, sondern um ihre begrifflichen Festlegungen.
>
> Es geht ja in der euklidischen Geometrie nicht darum, was die Augen sehen, sondern nur darum, was mit dem Verstand begriffen werden kann. [106]

Und in seiner Analyse von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ weist Felgner darauf hin, dass Euklid in seinen Elementen nirgends von „Lineal“ und „Zirkel“ als *realen Instrumenten* gesprochen habe, sondern nur von „Strecke und Kreis“ als zugehörigen *idealisierten Gegenständen*, was jedoch nicht dasselbe ist: [106]

> Daraus ergibt sich erneut, daß die Elemente Euklids nicht von den mechanisch ausführbaren Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (*κίρκινος*, *κανών*, circini regulaeque) handeln, sondern von den begrifflich gegebenen Kreisen und Strecken (*κύκλος*, *γραμμή*). Das wird in der Literatur häufig übersehen.

Breidenbach beschreibt in seinen beiden Büchlein von 1933 und 1953 diese Situation plausibel, indem er zunächst die Bezeichnungen „elementare Lösung“ und „exakte Lösung“ (eines geometrischen Problems) verwendet und später dann von „gedachten Lösungen“ spricht: [107]

> *Genauere Fassung des Problems.* Was hatte man gesucht? Man verlangte eine zugleich exakte und elementare Lösung. Eine Konstruktion heißt elementar, wenn sie lediglich das Lineal und den Zirkel als Konstruktionsmittel benutzt; und zwar dürfen beide Instrumente nur endlich oft und nur zu den folgenden Operationen verwendet werden: durch zwei Punkte eine Gerade legen und um einen Punkt mit bestimmtem oder beliebigem Radius einen Kreis zeichnen.

[105] In einer Mitteilung an mich vom 27. 04. 2015.

[106] [Felgner 2014, 189], dort in Fußnote 4; vgl. dazu die Betrachtungen in Abschnitt 7.2.

[107] [Breidenbach 1933, 1 f.]; ähnlich steht es bei [Breidenbach 1953, 9].

Bereits die Forderung nach einer „elementaren“ Lösung schließt alle bisher vorgestellten „Lösungen“ aus dem Bereich „gewünschter Lösungen“ aus. Die Forderung nach „Exaktheit“ schließt darüber hinaus *alle* Vorschläge als Lösungen aus, die (nur) durch praktisches Handeln, hier also das manuelle Zeichnen (mit welchen Hilfsmitteln auch immer) „realisiert“ werden, denn weder ein Punkt noch eine Gerade noch ein Kreis lassen sich „exakt“ zeichnen. Immerhin kann man sich solche Konstruktion „denken“.

In diesem Sinn schreibt Breidenbach daher anschließend exemplarisch zum Problem der Winkeldreiteilung:

> Ich denke mir einen Winkel und um seinen Scheitelpunkt einen Kreis gezeichnet. Er schneidet die Schenkel in je einem Punkt. Um beide Punkte denke ich mir je einen Kreis von gleichem (genügend großem) Radius gezeichnet. Einen ihrer Schnittpunkte denke ich mir mit dem Scheitel des Winkels verbunden. Diese gedachte Verbindungsgerade halbiert den gedachten Winkel: der eine Teil des Winkels muß notwendig genau so groß gedacht werden wie der andere. [108]

Und Felgner schreibt passend hierzu: [109]

> In dem euklidischen Postulaten-System werden jedoch keine grundlegenden Wahrheiten zusammengestellt, wie fast überall behauptet wird, sondern lediglich Vereinbarungen, in denen festgehalten wird, wie mit den *idealisierten* Gegenständen der neuen, theoretischen Geometrie umgegangen werden darf. Die Konstruktionsaufgaben in den *Elementen* Euklids sollen auch keine praktischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal beschreiben, sondern zeigen, daß die jeweiligen Figuren (als ideelle Gebilde, bestehend aus Punkten, Kreisen und Strecken) dem reinen, begrifflichen Denken zur Verfügung stehen.

Wir müssen daher zwischen einer *„theoretischen Geometrie“* als einer *„Geometrie gedachter Objekte“* – oder wie Wittenberg es wohl nennen würde: einer *„Wirklichkeit sui generis“* – und einer (dann vielleicht sinnig so genannten) *„praktischen Geometrie“* unterscheiden: [110]

Exakte Lösungen kann es nur in einer solchen „theoretischen Geometrie“ geben, während in einer „praktischen Geometrie“ stets nur *Näherungslösungen* entstehen können.

Andererseits können wir Konstruktionen, die wir uns innerhalb einer theoretischen Geometrie „bereits ausgeführt denken“, bekanntlich in einer praktischen Geometrie durch Zeichnungen (zumindest andeutungsweise) visualisieren – wobei wir beachten und uns bewusst machen müssen, dass wir in diese nicht exakten Zeichnungen den *exakten Kontext stets hineindenken* bzw. ihn mitdenken (müssen).

---

[108] [Breidenbach 1933, 2]; ähnlich steht es bei [Breidenbach 1953, 7 f.].

[109] [Felgner 2014, 189, Fußnote 5]; vgl. die Anmerkungen auf S. 6; Hervorhebungen nicht im Original.

[110] Felgner präzisierte eine solche „theoretische Geometrie“ in einer Mitteilung vom 27. 04. 2015 an mich auch als *„ein Umgehen mit den geometrischen Begriffen »in Gedanken«“*, was hier kurz und sinnig durch *„Geometrie gedachter Objekte“* beschrieben wird; zu Wittenberg vgl. Kapitel 1.

Felgner schreibt hierzu mit Bezug auf die „Elemente von Euklid“. [111]

> Es wird gleich im ersten Buch der *Elemente* definiert, daß Punkte solche Gegenstände sind, *„die keine Teile haben“*, und daß Linien *„breitenlose Längen“* seien etc.
>
> Damit hatte sich der Bereich der Gegenstände, der in der Geometrie untersucht werden soll, grundlegend geändert. Die Gegenstände sollen nicht mehr die sinnlich wahrnehmbaren Punkte, Linien und Flächen sein, sondern von nun an die gedachten, idealisierten Punkte, Linien, Flächen etc.
>
> Es handelt sich also um Gegenstände, die zwar „nicht von dieser Welt“ sind, die aber dennoch ihr Fundament in der sinnlichen Anschauung haben.

Später vertieft Felgner diese Aspekte, indem er zunächst den berühmten Anfang von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ zitiert, um dann Hilberts Position zu kommentieren: [112]

> *„Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen, ...“*
>
> Er verweist nicht auf die Wirklichkeit, wie es noch Moritz Pasch in seinen *Vorlesungen über die neuere Geometrie* (Berlin 1882) getan hat, sondern bezieht sich ganz bewußt auf Objekte, die nur gedacht werden, denen also kein *Erdenrest* mehr anhaftet. Auch die Grundbegriffe werden nicht durch Angabe ihrer anschaulichen Inhalte eingeführt, sondern rein formal durch implizite Definitionen. Auf diese Weise ist die Geometrie von allem *Erdenrest* befreit worden und es ist möglich geworden, die Geometrie einer logischen Analyse zu unterziehen.
>
> Damit ist die Geometrie, wie Freudenthal [...] betont hat, reine Mathematik geworden. Aber ihre Herkunft als Wissenschaft, die vom sinnlich wahrnehmbaren Raum handelt, soll und kann die Geometrie keineswegs leugnen.
>
> Als „allgemeines Wissensgebiet“ ist die Geometrie für Hilbert eine *„Naturwissenschaft“* [...]
>
> Aber die *„Theorie des Wissensgebietes“* ist nach Hilbert das *„Fachwerk der Begriffe“* [...].
>
> Die *„Theorie des Wissensgebietes“* ist keine Naturwissenschaft, sie ist ein Gebiet der reinen Mathematik.

Somit sind *zwei grundsätzlich verschiedene Auffassungen von „Geometrien“* zu unterscheiden:

- den *„praktischen Geometrien“* (die den Naturwissenschaften zuzurechnen sind) und den
- *„theoretischen Geometrien“* (als „Theorien der jeweiligen Wissensgebiete“), die nur „Geometrien gedachter Objekte“ sind ...

... und dennoch gibt es einen Zusammenhang! [113]

Felgner stellt hierzu nun mit Bezug auf die bisherigen „Lösungen“ der drei klassischen Probleme der Antike fest, wobei er auch auf die „Einschiebungen“ eingeht: [114]

---

[111] [Felgner 2014, 188]
[112] [Felgner 2014, 203]; bezüglich „Erdenrest“ siehe Fußnote 14 auf S. 8.
[113] Betr. „Theorie“ vgl. Kapitel 10.
[114] In einer Mitteilung vom 11. 05. 2013 an mich.

> Erst jetzt kann man die Frage stellen, warum man mit diesen Konstruktionsmitteln unzufrieden ist. Man kann jetzt erkennen, daß man sich auf die sinnliche Anschauung berufen mußte, die doch unsicher ist und die logische Struktur (und Komplexität) der Lösung gar nicht durchsichtig macht.
>
> Die genaue Lage von Punkten, die mit Zirkel und Lineal gefunden wurden, kann man ganz exakt beschreiben (mit den Begriffen des Kreises und der Geraden), aber die Lage von Punkten, die mit Einschiebungen gefunden wurden, läßt sich rein begrifflich nicht beschreiben, sondern nur mit den Augen ungefähr „sehen“. Dem Verstand ist die Lage solcher Punkte also nicht bekannt und deshalb sind diese Lösungen mit höheren Kurven oder Einschiebungen letztlich unbefriedigend und keine wirklich mathematisch befriedigenden Lösungen.

Damit kommen wir zur *euklidischen Geometrie*, die nun als eine *„theoretische Geometrie“* (s. o.) zu entlarven ist. Felgner fährt in diesem Sinne fort und schreibt, dass Euklid [114]

> [...] nur solche Konstruktionen behandelt, die sich nicht auf die sinnliche Anschauung stützen müssen, sondern vom Verstand auch ohne Anschauung begriffen werden können. In der Tat spricht Euklid auch nur von den Begriffen „Punkt, Strecke, Kreis“ und nicht von den zugehörigen mechanischen Geräten „Punktierstift, Lineal, Zirkel“.

Es ist also nicht richtig, dass Euklid – wie oft behauptet – von Konstruktionen „mit Zirkel und Lineal“ spricht. Dieses kann man allenfalls „retten“, indem man zugleich deutlich macht, dass damit keine „realen“ Konstruktionen gemeint sind, sondern nur „gedachte“.

Wie man nun auf Basis einer solchen euklidischen „Geometrie gedachter Objekte“ zu exakten Konstruktionen und exakten Lösungen kommen kann, deutet Felgner in Fortsetzung seiner Mitteilung an: [114]

> Daß aber auch die „höheren“ Methoden (Einschiebungen, Schnitte algebraischer Kurven) der antiken Mathematiker rein begriffliche Beschreibungen haben, die dem Verstand (ohne Zuhilfenahme der Anschauung) zur Verfügung stehen, hat erst Descartes 1637 in seiner „Géométrie“ gezeigt: es werden Koordinaten eingeführt und dann unter Verwendung algebraischer Begriffe (Addition, Subtraktion, Multiplikation etc.) eine rein-begriffliche Beschreibung gegeben. Die „höheren“ geometrischen Methoden werden also zwar nicht in der Begriffs-Sphäre Euklids dargestellt, sondern in einer expandierten Begriffs-Sphäre, die auch algebraische Operationen einschließt.
>
> Damit konnte auch in der von Gauß, Abel und Galois entworfenen „Galois-Theorie“ gezeigt werden, daß die oben genannten „höheren“ geometrischen Methoden der griechischen Antike keine Definitionen in der engeren euklidischen Begriffs-Sphäre haben.

7.3 Vertiefung: exakte Lösungen vs. Näherungslösungen

Wie bereits in Abschnitt 2.3.4 vorwegnehmend angedeutet wurde, können die bisherigen Beispiele entweder als eine *exakte Lösung* oder als eine *Näherungslösung* des jeweiligen Problems aufgefasst werden.

Sie seien nachfolgend übersichtlich in historischer Reihenfolge gruppiert:

- **Exakte Lösungen**
  – Würfelverdoppelung nach *Archytas* mit Hilfe der „krummen Linie“ (S. 37)
  – Würfelverdoppelung nach *Menaichmos* mittels Schnittpunkt von zwei Parabeln (S. 43)
  – Winkeldreiteilung und Würfelverdoppelung nach *Nikomedes* mittels Konchoïde (S. 25, 40)

- **Näherungslösungen**
  – Würfelverdoppelung nach *Hippokrates* mit einem Winkelhaken-Paar (S. 34)
  – Kreisquadratur nach *Dinostratos* mittels Quadratrix (S. 47)
  – Winkeldreiteilung und Kreisquadratur nach *Archimedes* mittels Spirale (S. 19, 49)

Für die folgenden Näherungslösungen ist durch *manuelle Annäherung auf der Basis sinnlicher Wahrnehmung* eine „Lösungsposition“ zu finden. [115] Insbesondere basiert Archimedes‘ Einschiebelineal auf der *Neusis* (vgl. Abschnitt 7.1):
  – Winkeldreiteilung nach *Hippias* mittels Trisectrix (S. 19)
  – Winkeldreiteilung nach *Archimedes* mit einem Einschiebelineal (S. 22)
  – Würfelverdoppelung nach *Eratosthenes* mit dem Holzrahmen-Apparat (S. 32)
  – Würfelverdoppelung nach *Eratosthenes* mit dem Mesolabium (S. 42)

Manche Konstruktionen liefern eine Problemlösung durch Auffinden eines Schnittpunkts mit bestimmten Kurven. Insofern könnte man sie alle als exakt ansehen. Beispielsweise betrachten wir **Nikomedes** mit seiner Konchoïde, denn er hat bekanntlich [116]

> versucht, die archimedischen „Einschiebungen“ zu eliminieren und durch Schnitte algebraischer Kurven zu ersetzen. Dazu hat er beispielsweise seine Konchoïde entworfen.

So ist bei Nikomedes‘ Einschiebung seine Konchoïde als eine (höhere) algebraische Kurve zu *denken*, [117] die einem gegebenen zu drittelnden Winkel δ eindeutig zugeordnet ist. Diese Kurve tritt dabei wie eine Gerade oder ein Kreis als ein *weiteres geometrisches* (wenn auch nur als gedachtes!) *Objekt* auf den Plan, das im Schnitt mit anderen Objekten (in diesem Fall also mit einer Geraden) einen gesuchten „Lösungspunkt“ liefert. Beispielsweise zeigt Bild 7.1 auf S. 51, dass die Orthogonale zur Geraden $\langle CM \rangle$ durch den vorgegebenen Punkt M eindeutig den Schnittpunkt A auf der Konchoïden für den gesuchten zweiten Schenkel von $\delta/3$ liefert.

---

[115] Etwas „wahrnehmen“ bedeutet wörtlich, es „für wahr zu nehmen“, nicht aber, dass es „wahr“ ist.
[116] Zitat von Felgner auf S. 27 zu Fußnote 50.
[117] Siehe dazu den letzten Abschnitt: „theoretische Geometrie“ als „Geometrie gedachter Objekte“!

Insofern ist Nikomedes‘ Konstruktion also als „exakt“ anzusehen, wobei sie aber im Sinne von Breidenbach nicht „elementar“ ist, denn sie beschränkt sich nicht auf die Verwendung der elementargeometrischen Objekte „Punkt“, „Gerade“ und „Kreis“. Entsprechend sind die Konstruktionen von Archytas und Menaichmos „exakt“, weil hier ebenfalls algebraische Kurven benutzt werden. Auch bei der Trisectrix (= Quadratrix) und der Spirale werden Kurven zum Schnitt verwendet, es sind jedoch *transzendente Kurven*. *Um hierin exakte Lösungen sehen zu wollen, müssten aber Mittel der Analysis zugelassen werden*.

In Abschnitt 5.2.3 begründet Felgner ausführlich, dass vermutlich bereits **Hippokrates** von Chios, der ja das Problem der Würfelverdoppelung auf die Ermittlung zweier mittlerer Proportionalen zurückgeführt hat, [118] dieses „Delische Problem“ mittels zweier Winkelhaken gelöst habe. Er schreibt ergänzend: [119]

> Diese „praktische“ Lösung mit zwei Winkelhaken ist allerdings keine exakte Lösung des Problems der Würfelverdopplung, da die genaue Lage des Winkelhaken-Paares (mit den Ausdrucksmitteln der elementaren Geometrie) nicht exakt beschrieben wurde. Eine exakte Lösung hatte Hippokrates demnach noch nicht gefunden.

Und bezüglich der Ermittlung von zwei mittleren Proportionalen x, y zu a, b ergänzt er: [120]

> Hippokrates war weder eine Beschreibung der gesuchten Größe x noch der ebenfalls gesuchten Größe y (jeweils einzeln und unabhängig voneinander) unter Verwendung der elementar-geometrischen Begriffe der geraden Linie, des Kreises und des Winkels und der beiden vorgegebenen Längen a und b gelungen.
> Es war ihm nur gelungen, die beiden gesuchten Größen x und y simultan (!) in Beziehung zu a und b zu setzen (nämlich in der Gleichung $a : x = x : y = y : b$), und das war völlig exakt.

Wesentlich ist im letzten Zitat die unterstrichene Phrase: Die beiden gesuchten mittleren Proportionalen x und y existieren nämlich *nicht* unabhängig voneinander, was jedoch nicht bedeutet, dass sie nicht vielleicht dennoch sowohl sukzessive als auch exakt ermittelbar wären. In diesem Sinn fährt Felgner a. a. O. fort:

> Aber auch nach Hippokrates wollte Niemandem eine explizite Beschreibung der beiden mittleren Proportionalen (jeweils einzeln) mit den elementaren, rein geometrischen Begriffen der euklidischen Geometrie gelingen. Erst im 19. Jahrhundert gelang mit den Mitteln der Theorie der reell-algebraischen Zahl-Körper der Nachweis, daß solche expliziten Beschreibungen nur mit elementargeometrischen Begriffen auch gar nicht möglich sind.
>
> Aber es war dennoch einigen Geometern bereits in der Antike gelungen, entweder
> - unter Verwendung algebraischer Kurven höheren Grades explizite (!) geometrische Darstellungen der beiden mittleren Proportionalen (Archytas, Diokles, Menaichmos, Nikomedes, et al.), oder
> - unter Verwendung von Einschiebungen (Apollonios, Eratosthenes, Heron, Hippokrates, Philon, Platon, Sporos et al.) mehr oder weniger praxistaugliche Lösungen

[118] Siehe dazu Abschnitt 1.1.
[119] In einer Mitteilung Ulrich Felgners vom 07. 05. 2015 an mich.
[120] A. a. O.; Hervorhebung nicht im Original.

> zu geben. Explizite Beschreibungen der gesuchten mittleren Proportionalen unter Verwendung elementar-geometrischer Mittel (gerade Linien, rechte Winkel und Kreise) wollten nicht gelingen. Aber unter Verwendung krummer Linien gelangen sie!
> Dem Pythagoräer Archytas von Tarent war als Erstem eine solche explizite Beschreibung unter Verwendung von gekrümmten Raumkurven gelungen.

Und damit ist die in Abschnitt 5.3 dargestellte Lösung des Problems der Würfelverdoppelung gemeint. [121]

Felgner kommentiert dann a. a. O. Archytas‘ Beweis: [122]

> Aus dem Beweis ergibt sich, daß es Archytas gelungen war, unter Verwendung der Begriffe des Kegels, Zylinders und Torus' und der üblichen elementargeometrischen Begriffe (Gerade, Kreis, rechter Winkel) die gesuchte Kantenlänge x explizit zu beschreiben, so, daß ihre Beschreibung nicht von der ebenfalls gesuchten Größe y abhängt!
> Die Abhängigkeiten der beiden Größen x und y von a und b konnten also getrennt werden; jede der beiden gesuchten Größen kann für sich allein in Abhängigkeit von a und b bestimmt werden. Das war ein wesentlicher Schritt über Hippokrates hinaus. Zugleich ergibt sich, daß die gesuchte Größe nicht approximativ gefunden war, sondern völlig exakt. Die Lösung war zwar begrifflich gegeben, aber dennoch nicht Praxis-tauglich.
> Es ist fair zu sagen, dass es sich um eine theoretische Lösung handelt.
> Nach Archytas war es auch Menaichmos, Nikomedes und Diokles gelungen, unter Verwendung algebraischer Kurven und ihrer Schnittpunkte die gesuchten mittleren Proportionalen explizit zu beschreiben. Auch sie gaben demnach völlig exakte, explizite (theoretische) Lösungen. Im Unterschied zu Archytas kamen sie mit ebenen (!) Kurven aus.
> Die Lösungen von Apollonios, Eratosthenes, Heron, Pappos, Philon und Sporos waren demgegenüber keine exakten Lösungen, sondern nur mehr oder weniger Praxistaugliche Näherungslösungen.

7.4 19. Jahrhundert: die endgültige Lösung der drei klassischen Probleme

7.4.1 Grundlegendes: Definition von „mit Zirkel und Lineal konstruierbar"

Der in Betracht stehende geometrische „Raum" (also die euklidische Ebene) besteht aus „Punkten" $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die wir uns in einem kartesischen Koordinatensystem „denken". Anstelle von „Lineal" und „Zirkel", die man praktisch zum Zeichnen von Geraden und Kreisen verwendet, werden diese letztgenannten Objekte – die bei Euklid axiomatisch beschrieben werden – nun analytisch (bzw. noch besser: „algebraisch") durch lineare bzw. quadratische Gleichungen beschrieben, und die „Schnittpunkte" solcher Objekte erscheinen dann als Lösungen linearer oder quadratischer Gleichungen.

Nun ist die algebraische *Theorie der Körpererweiterungen* heranzuziehen, was nachfolgend nur angedeutet sei: [123]

---

[121] Siehe dazu die ausführliche Betrachtung in [Hischer 2003].
[122] Siehe dazu S. 37 ff.
[123] Siehe Lehrbücher der Algebra; zur verwendeten Notation vgl. z. B. [Hischer 2012].

$(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ ist ein vollständiger, archimedisch angeordneter Körper (und zwar ist er „maximal" unter allen archimedisch angeordneten Körpern), der Unterkörper $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ ist dagegen der kleinste archimedisch angeordnete Körper.

Sind $(K,+,\cdot,\leq)$ und $(E,+,\cdot,\leq)$ Unterkörper von $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ mit $K\subset E$, so nennt man $(E,+,\cdot,\leq)$ eine *Körpererweiterung* von $(K,+,\cdot,\leq)$.

Ist $\alpha\in\mathbb{R}\backslash K$, so existiert eine eindeutige *minimale* Körpererweiterung $(K(\alpha),+,\cdot,\leq)$ von $(K,+,\cdot,\leq)$ mit $\alpha\in K(\alpha)$, so ist beispielsweise $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$. Der „Grad" der Körpererweiterung von $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\cdot,\leq)$ über $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ – kurz: „von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ über $\mathbb{Q}$" – ist dann 2, und der von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ über $\mathbb{Q}$ ist 3.

Eine reelle Zahl ξ ist nun definitionsgemäß **„mit Zirkel und Lineal konstruierbar"**, wenn ein Unterkörper $(K,+,\cdot,\leq)$ von $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ mit $\xi\in K$ existiert, der ausgehend von $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ als Vereinigung einer endlichen Kette von Körpererweiterungen, die jeweils den Grad 2 über ihrem Vorgänger haben, gewonnen werden kann.

7.4.2 Das Delische Problem

Dieses führt gemäß Bild 2.1 bezüglich der „Punkte" $(x,0)$ und $(a,0)$ auf die Gleichung $x^3=2a^3$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o. B. d. A.) sei $a=1$. Dann ist $x^3=2$ zu lösen. Weil $(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),+,\cdot,\leq)$ als zugehöriger (minimaler!) Erweiterungskörper über $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ den Grad 3 hat, gilt:

- *Das Delische Problem ist **nicht** mit Zirkel und Lineal lösbar.*

7.4.3 Die Quadratur des Kreises

Dieses Problem führt gemäß Bild 2.1 zunächst auf die Gleichung $x^2=\pi r^2$, wobei hier die „Punkte" $(x,0)$ und $(\pi,0)$ zugrunde liegen. O. B. d. A. sei $r=1$. Dann ist also $x^2=\pi$ zu lösen. Wegen der von Ferdinand von Lindemann 1882 bewiesenen Transzendenz von π [124] gibt es jedoch keine π enthaltende Körpererweiterung von $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$, deren Grad eine Potenz von 2 ist, und mithin gilt:

- *Die Quadratur des Kreises ist mit Zirkel und Lineal **nicht** möglich.*

7.4.4 Die Winkeldreiteilung

Die Dreiteilung eines Winkels α führt gemäß Bild 2.1 mit $\beta:=x$ zunächst auf die zu lösende Gleichung $\beta=\alpha/3$, wobei $0\leq\alpha\leq\pi/2$ vorausgesetzt sei. [125]

Auf $[0;\pi/2]$ ist cos injektiv, daher existiert umkehrbar eindeutig ein $c\in[0;1]$ mit $\cos(\alpha)=c\in\mathbb{Q}(c)\subseteq\mathbb{R}$, und mit $\beta=\alpha/3$ existiert ebenso umkehrbar eindeutig ein $\zeta\in[0;1]$ mit $\zeta=\cos(\beta)$, also gilt

$c=\cos(\alpha)=\cos(3\beta)=4\cos^3(\beta)-3\cos(\beta)=4\zeta^3-3\zeta\in\mathbb{R}$, also $4\zeta^3-3\zeta-c=0$.

[124] Vgl. S. I oben.

[125] Der allgemeine Fall lässt sich darauf zurückführen.

ζ ist also eine reelle Nullstelle des y-Polynoms $4y^3 - 3y - c$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}(c)$, und damit ist ζ definitionsgemäß *algebraisch* über $(\mathbb{Q}(c), +, \cdot, \leq)$. In $\mathbb{C}$, der Menge der komplexen Zahlen, wäre nun bekanntlich $4y^3 - 3y - c$ stets als Produkt von drei Linearfaktoren darstellbar, in $\mathbb{R}$ zumindest stets in der Form $u(y-v)(y^2 - w)$. Der Grad der Körperweiterung von $(\mathbb{Q}(c), +, \cdot, \leq)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ wäre dann entweder $1 \cdot 1 \cdot 1 = 2^0$ oder $1 \cdot 2 = 2^1$, in jedem Fall also eine Potenz von 2, und der Winkel α wäre dann mit Zirkel und Lineal drittelbar.

In $\mathbb{Q}(c)$ ist hingegen eine solche Faktorisierbarkeit nicht stets gewährleistet, wenn nämlich beispielsweise im zweiten Fall die Nullstellen v und $\sqrt{w}$ nicht zugleich in $\mathbb{Q}(c)$ liegen. In dem Fall wäre also $4y^3 - 3y - c$ in dem Polynomring über $\mathbb{Q}(c)$ nicht in Faktoren zerlegbar, d. h. „irreduzibel“ über $\mathbb{Q}(c)$, und der Grad der Körperweiterung von $(\mathbb{Q}(c), +, \cdot, \leq)$ über $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ wäre 3, so dass der Winkel α nicht mit Zirkel und Lineal drittelbar wäre.

Dieser Fall tritt nun dann ein, wenn c *transzendent* über $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist (was „fast immer“ der Fall ist, weil die Menge der algebraisch-reellen Zahlen abzählbar und die Menge der transzendent-reellen Zahlen hingegen überabzählbar ist). Somit gilt:

- *Ein beliebiger Winkel ist „fast immer“* ***nicht*** *mit Zirkel und Lineal drittelbar.*

7.5 Zusammenfassung

Die Frage der Lösbarkeit der drei klassischen Probleme der Antike „mit Zirkel und Lineal“ ist damit bei Zugrundelegung einer „theoretischen Geometrie“ (also einer „Geometrie gedachter Objekte“, s. o.) abschließend zusammenfassend negativ zu beantworten:

- *Die Würfelverdoppelung und die Kreisquadratur sind in keinem Fall mit Zirkel und Lineal möglich, die Winkeldreiteilung ist immerhin fast nie mit Zirkel und Lineal möglich.*

7.5.1 Winkeldreiteilung

Die Winkeldreiteilung gelang jedoch in den Beispielen sowohl mit *kinematisch erzeugten Kurven* als auch mittels *Neusis*. Als Kurven wurden die *Trisectrix*, die *Archimedische Spirale* und die *Muschellinie des Nikomedes* verwendet.

Der Nachweis der Dreiteilung sowohl mit Hilfe der Trisectrix als auch mit Hilfe der Archimedischen Spirale war formal-geometrisch sehr einfach, denn er beruhte im Wesentlichen jeweils nur auf dem Strahlensatz. Als Nachteil ist vielleicht anzusehen, dass beide Kurven nicht organisch erzeugt vorlagen, sondern punktweise erzeugt waren, wobei z. T. offen blieb, ob sie möglicherweise organisch *erzeugbar* sind. Aber: Sie sind immerhin „exakt denkbar“!

Dieser Nachteil entfällt bei der Muschellinie, die sogar mit einem eigenen „Zirkel“ organisch erzeugbar ist.

Nachteilig ist allerdings bei Nikomedes‘ Verfahren mit der Muschllinie, dass für jeden zu drittelnden Winkel zunächst eine eigene Muschellinie erzeugt werden muss. Ferner ist der Nachweis der Winkeldreiteilung durch die Muschellinie formal-geometrisch aufwendiger, wenngleich dieser Beweis nur grundlegende elementare Eigenschaften der Schulgeometrie erfordert.

Elegant ist hingegen das Verfahren der approximierenden *Neusis* mit Hilfe von Archimedes‘ Einschiebelineal als einem winkelunabhängigem Werkzeug, wobei der Beweis identisch ist mit dem für die Muschellinie.

7.5.2 Würfelverdoppelung

Alle vorgestellten Methoden zur Lösung der Würfelverdoppelung beruhen auf der Ermittlung von zwei mittleren Proportionalen gemäß dem Hilfssatz des Hippokrates. Als Verfahren wurden *zwei Einschiebelösungen* (Holzrahmen-Apparat, Winkelhaken), *zwei Kurven* mit jeweils einem darauf zu bestimmenden Punkt (*Muschellinie* als ebene Kurve, *Archytas-Kurve* als Raumkurve) und der *Schnittpunkt von zwei ebenen Kurven* (Parabelschnitt nach *Menaichmos*) vorgestellt.

Beide Einschiebeverfahren sind mathematisch gleichwertig und elementar zu verstehen, das Einschiebeverfahren mit zwei Winkelhaken ist auch leicht durchführbar. Das Verfahren nach Menaichmos erfordert zum Verständnis heute nicht mehr übliche, wenngleich elementare Kenntnisse über Kegelschnitte; es ist aber reizvoll, weil die zu schneidenden Parabeln sogar organisch erzeugbar sind.

Das Muschellinienverfahren ist nicht mehr trivial zu verstehen, obwohl in allen Schritten nur elementargeometrische Kenntnisse zum Tragen kommen; gleichwohl ist es besonders schön, weil hier eine organisch erzeugbare Kurve nicht nur zur Dreiteilung, sondern auch zur Würfelverdoppelung genutzt wird, was Fragen aufwerfen sollte.

Das aufwendigste Verfahren ist das nach Archytas, das aber auch gar *nicht als reales Verfahren* anzusehen ist, sondern das vor allem dem Verständnis geometrischer Zusammenhänge im Sinne einer *gedachten (Raum-)Geometrie* dient.

7.5.3 Kreisquadratur

Es wurden zwei Verfahren vorgestellt, die auf der Verwendung je einer Kurve basieren, die schon zur Winkeldreiteilung verwendet wurde: die *Trisectrix* (als *Quadratrix*) und die *Archimedische Spirale*. Im Gegensatz zu den anderen betrachteten (algebraischen) Kurven liegen hier jeweils *transzendente Kurven* vor, was jedoch bei den Lösungsversuchen (noch) nicht explizit deutlich wurde.

Beim ersten Verfahren wird in einen Viertelkreis gemäß Bild 6.2 eine Quadratrix eingebettet, die die Strecke q liefert. Hieraus erhält man mit dem Strahlensatz eine Strecke der Länge s, die genauso lang ist wie der Viertelkreisbogen der Länge $\overset{\frown}{b}$, so dass sich gemäß Bild 6.2 und dem Höhensatz des Euklid ein zum Kreis flächeninhaltsgleiches Quadrat konstruieren lässt. Doch wie erhält man die Länge q?

Jeder Punkt der Quadratrix ist definitionsgemäß als Schnittpunkt zwischen einem Radialstrahl und einer horizontalen Strecke definiert – aber bei $\varphi = 0$ existiert kein Schnittpunkt! Für $\varphi \neq 0$ und $\varphi \approx 0$ existiert zwar „idealgeometrisch“ ein Schnittpunkt, jedoch ist dieser „realgeometrisch“ sehr „wackelig“. Vielmehr existiert der gesuchte „Schnittpunkt“ nur ideell als *Grenzwert* q der beiden kinematisch definierten Bewegungen. Falls diese Bewegungen nicht exakt synchron ablaufen, ergeben sich für diesen Grenzwert geradezu katastrophal unterschiedliche Werte, [126] was mit Geometrieprogrammen visualisierbar ist.

Bei der auf der Archimedischen Spirale beruhenden Methode geht es darum, eine Tangente an die Spirale zu konstruieren, die den Schnittpunkt $(s, 0)$ liefert mit $s = (\pi/2) \cdot r = \widehat{b}$, so dass $2sr = \pi r^2$ gilt. Anstelle der allgemeinen Konstruktion der Tangente wurde dies in Anlehnung an Archimedes für einen Spezialfall durchgeführt, so dass das Problem damit gelöst werden konnte.[127]

Sowohl die Quadratrix als auch die Archimedische Spirale liefern damit wegen einer konstruktiven Unvollkommenheit bezüglich der benötigten Streckenlängen q bzw. s eigentlich keine „Lösungen“ des Problems der Kreisquadratur. Immerhin offenbaren sie sehr reizvolle geometrisch-analytische Zusammenhänge, die jeweils darin gipfeln, dass eine Strecke gesucht ist, die zu einer gegebenen Strecke im Verhältnis $\pi : 2$ bzw. $2 : \pi$ steht.

7.5.4 Tabellarischer Überblick

Die nachfolgende Tabelle zeigt für die hier betrachteten „Lösungen“ der drei klassischen Probleme die jeweils verwendeten Werkzeuge oder Methoden, woraus erneut ersichtlich ist, dass einige unter ihnen für die Lösung verschiedener Probleme verwendbar sind. In der Eingangsspalte stehen die Werkzeuge bzw. die Methoden, in der Eingangszeile die zu lösenden Probleme:

	Kreisquadratur	Winkeldreiteilung	Würfelverdoppelung
Trisectrix des Hippias (= Quadratrix)	×	×	
archimedische Spirale	×	× via Neusis	
archimedisches Einschiebelineal		×	
Muschellinie (= Konchoïde)		×	× via 2 mittlere Proportionale
Archytas-Kurve, Mesolabium, Parabelschnitt, Winkelhaken			× via 2 mittlere Proportionale

[126] Siehe dazu Abschnitt 9.2.4.

[127] Bei [Jäger & Schupp 2013, 9 f.] findet sich eine allgemeine Untersuchung.