2 Übersicht

2.1 Skizze der drei klassischen Probleme der Antike

Mit diesem Prolog sind damit die gut 2400 Jahre alten drei berühmten klassischen Probleme der griechischen Antike angesprochen: Dreiteilung eines Winkels, Quadratur des Kreises und Verdoppelung des Würfels, zu denen Viktor Viktorovich Bobynin 1908 schreibt:[4]

> Ebenso wie früher, vielleicht auch noch in größerem Maße, war die Aufmerksamkeit einiger Spezialisten und überhaupt vieler Leute, die dem aufgeklärteren Teile der Gesellschaft angehören, im Laufe der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts auf das Vermächtnis des Altertums, die berühmten Aufgaben der Dreiteilung eines Winkels, Quadratur des Kreises und der Verdoppelung des Würfels, gerichtet.

Ähnlich äußert sich 60 Jahre später der Mathematikhistoriker Carl. B. Boyer:[5]

> These three problems – the squaring of the circle, the duplication of the cube, and the trisection of the angle – have since been known as the “three famous (or classical) problems” of antiquity.

Aber erneut ist zu fragen: Wieso liegen hier eigentlich „Probleme“ vor? Worum geht es?

Bei der *Quadratur des Kreises* ist ein Kreis mit gegebenem Radius durch eine *geometrische Konstruktion* in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln: Ist r der Radius des gegebenen Kreises, so ist „konstruktiv“ eine Kantenlänge x mit $x^2 = \pi r^2$ zu ermitteln und damit also eine Gleichung konstruktiv zu lösen. Analog ist bei der *Verdoppelung des Würfels* zu einem gegebenen Würfel mit der Kantenlänge a konstruktiv eine weitere Kantenlänge x derart gesucht, dass $x^3 = 2a^3$ gilt. Und bei der *Dreiteilung eines Winkels* ist zu einem gegebenen Winkel der Größe α konstruktiv ein zweiter Winkel der Größe x derart zu ermitteln, dass $x = \alpha/3$ gilt.

Bild 2.1 visualisiert diese *Konstruktionsaufgaben* mit der *Variablen-Bindung* „$?x$: ...“ in der Bedeutung von: *„Gibt es ein x, so dass ... gilt?“*.[6]

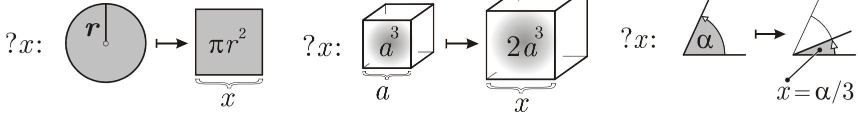


Bild 2.1: Visualisierung
der mit den drei klassischen Problemen der Antike verbundenen Konstruktionsaufgaben

4 [Bobynin 1908, 375]
5 [Boyer 1968, 70]
6 [Freudenthal 1973 b, 585] nennt dies die „interrogative Variablenbindung“. Hier könnte man diese Formulierung sinnfällig lesen als: *„Wie findet man ein x, so dass ... gilt?“*

Dabei ist anzumerken, dass das Wort „Quadratur“ sich ursprünglich nicht nur auf die „Kreisquadratur“ bezieht, sondern (wegen der Umwandlung in flächeninhaltsgleiche Quadrate) generell auf *Flächeninhaltsberechnungen*, beispielsweise bei der „Quadratur der Ellipse“ oder bei der „Quadratur der Möndchen des Hippokrates“, später dann verallgemeinert – wie in der numerischen Mathematik – auf die bestimmte Integration, wo man z. T. die kaum mehr gerechtfertigte Sprechweise „Quadratur einer Differentialgleichung“ findet.

Es bleibt zu klären, in welcher Hinsicht diese drei Konstruktionsaufgaben eigentlich „Probleme“ bilden – Probleme, die schon in der griechischen Antike auftraten. Ein Grund dafür – so viel sei hier zunächst angedeutet – ist in den jeweils verwendeten Konstruktionswerkzeugen zu finden, die spezifische konstruktive Möglichkeiten eröffnen bzw. diese bei Nichtverfügbarkeit sogar ausschließen: So dient z. B. ein (nicht skaliertes) *Lineal* der *Zeichnung* eines Geradenabschnitts durch zwei gegebene Punkte, aber ein solcher Abschnitt lässt sich auch durch *Falten* eines Blattes Papier herstellen, ein Lineal ist also nicht zwingend nötig; doch zum *Zeichnen* eines Kreises um einen gegebenen Mittelpunkt mit gegebenem Radius benötigt man ein geeignetes Instrument, vornehmlich einen *Zirkel*, ersatzweise eine andere, z. B. materielle Realisierung. [7]

2.2 Warum Konstruktion „mit Zirkel und Lineal“?

Seit Anfang der 1990er Jahre stehen für geometrische Konstruktionen im Mathematikunterricht zunehmend Programme für eine *Bewegungsgeometrie* als neuen Werkzeugen zur Verfügung. Und dabei hat erst in den 1960er Jahren das „Geodreieck“ als Hilfsmittel Einzug in den Mathematikunterricht gehalten (es wurde in den 1930er Jahren von der Firma Wichmann für nautische Zwecke entwickelt; [8] 1964 kam es durch die Firma Aristo als „Geodreieck“ in die Schulen), waren hier doch bis dahin nur Zirkel, Lineal und ein „Zeichendreieck“ (meist in Gestalt einer – nicht skalierten – Schablone in Form eines rechtwinkligen Dreiecks [8]) als Konstruktionshilfsmittel „zulässig“, [7] Letzteres in Verbindung mit dem üblichen (dann meist skalierten) Lineal zum „Konstruieren“ von Parallelen durch sog. „Parallelverschiebung“ (was im Mathematikunterricht schon lange nicht mehr „üblich“ ist).

Die Verwendung dieser „klassischen“ Hilfsmittel mag ihre Begründung in einem Bezug auf einen „axiomatischen Aufbau der Geometrie“ mit „Zirkel und Lineal“ finden, wie er vermeintlich in Euklids „Elementen“ gefordert sei. Aber streng genommen ist in diesen „Elementen“ nur von den ideellen Gegenständen „Strecke“ und „Kreis“ die Rede, nicht aber von den technischen Hilfsmitteln „Lineal“ und „Zirkel“. [9]

---

[7] So kannte man in der Antike den sog. „Winkelhaken“ als „Rechtwinkel-Instrument“ (vgl. S. 34 f.), mit dem darüber hinaus ein Kreisbogen „konstruierbar“ ist (vgl. S. 37).

[8] Vgl. [Vollrath 1999].

[9] Vgl. dazu die Betrachtungen in Abschnitt 7.2.

Dennoch legt auch dieser zunächst nur *ideelle* Bezug Euklids auf Strecken und Kreise für *praktisch durchzuführende Konstruktionen* die Verwendung der konkreten und *realen* und „üblichen“ Instrumente „Lineal und Zirkel“ nahe, so dass dadurch deren erwähnte historisch zwar nicht korrekte (wenn auch nachvollziehbare!) Zuweisung zu Euklids Elementen entstanden sein mag. In diesem Sinn führt Cantor bezüglich der hier zu erörternden klassischen Probleme darüber hinaus aus, es seien

> drei Probleme, durch welche die höhere Mathematik, der Zirkel und Lineal nicht genügen, hervorgerufen wird. [10]

Dies darf allerdings nicht so gedeutet werden, dass die „höhere Mathematik“ durch diese Probleme „erst hervorgerufen“ worden ist – vielmehr gilt das „Umgekehrte“: dass nämlich durch die beginnende Begründung der modernen Algebra im 19. Jahrhundert und damit „durch die höhere *Mathematik“ diese Probleme endlich gelöst werden konnten, und zwar sämtlich negativ in dem* Sinne, dass die *ideellen Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar* sind, oder genauer:

Im 19. Jahrhundert konnte gezeigt werden, dass *diese drei klassischen Probleme* (in zu noch präzisierendem Sinn) *mit Zirkel und Lineal nicht lösbar* sind, wie es z. B. Carl B. Boyer beschreibt: [11]

> More than 2200 years later it was be proved that all three of the problems were unsolvable by means of straightedge and compasses alone. Nevertheless, the better part of Greek mathematics, and of much later mathematical thought, was suggested by *efforts to achieve the impossible – or, failing this, to modify the rules.*

Das lässt aufhorchen: Einerseits konnte nun endlich bewiesen werden, dass die drei Probleme „mit Zirkel und Lineal“ (in noch zu definierender Weise) nicht lösbar sind, und andererseits hatte man – dieses noch nicht wissend – seit der griechischen Antike erhebliche Anstrengungen unternommen, um das (aus heutiger Sicht der „höheren Mathematik“) Unmögliche zu erreichen, zumindest aber diese Probleme durch *„Abänderung der Regeln“* und damit der für die gesuchten Konstruktionen zulässigen Werkzeuge bzw. Methoden zu lösen. [12]

Denn solche jeweils gesuchten „Konstruktionen“ sind für konkrete, etwa mechanische Anwendungen ggf. durchaus realisierbar, und so wurden zu diesem Zweck seit der Antike noch bis ins 20. Jahrhundert hinein etliche Methoden und „Werkzeuge“ bzw. „Hilfsmittel“ *ge*funden oder *er*funden, die jeweils hinreichend gute praxistaugliche, und damit zumindest approximierte bzw. approximierende Lösungen liefern. In den Kapiteln 4, 5 und 6 werden dazu exemplarisch wichtige Lösungsansätze aus der antiken griechischen Mathematik vorgestellt.

---

[10] [Cantor 1894, 237]

[11] [Boyer 1968, 70]

[12] Im Kontext von „Zirkel und Lineal“ mit Bezug auf obiges Zitat von Boyer beachte man, dass „rule“ im Deutschen „Regel“ bedeutet und dass das deutsche „Lineal“ im Englischen als „ruler“ auftritt!

Beispielsweise ist das „Problem der Winkeldreiteilung“ aus Sicht der Praxis und der Technik von ähnlicher Bedeutung wie die Frage nach der Irrationalität von $\sqrt{2}$ oder die nach der Transzendenz von π: Denn all diese „ideellen Probleme“ (!) sind für handwerkliche oder technische Anwendungen gleichermaßen irrelevant – jedoch sind es zugleich jeweils *fundamentale mathematische Fragen.* So geht es bei diesen drei klassischen „Problemen“ aus Sicht der „Reinen“ Mathematik (im Gegensatz zur „Angewandten“ Mathematik) nicht darum, ob und mit welchen Hilfsmitteln und Methoden man die drei beschriebenen antiken Konstruktionsaufgaben in praktischer Realisierung näherungsweise (oder ggf. gar „exakt“?) lösen kann. Vielmehr geht es einzig um die Frage, ob es möglich ist, solche für die Lösung dieser Probleme gesuchten „ideellen Konstruktionen“ *nur mit Hilfe der Verwendung von Zirkel und Lineal* zu finden bzw. anzugeben – was allerdings zunächst eine *Definition dessen* voraussetzt, was man eigentlich unter einer „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“ verstehen *will* oder *kann*.

Zur Vermeidung von Missverständnissen bezüglich dieser „drei klassischen Probleme“ ist also nachdrücklich festzuhalten, dass sie in Bezug auf eine gewünschte Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal in ihrer im 19. Jahrhundert erbrachten abschließenden „negativen Lösung“ *keine* Aspekte der *Anwendung von Mathematik* auf die „Wirklichkeit“ (manchmal auch „Rest der Welt“ genannt) betreffen, sondern dass sie ein rein innermathematisches Thema bilden – Mathematik begegnet uns hier gemäß Israel Alexander Wittenberg als *„Wirklichkeit sui generis“*, also als *Wirklichkeit von eigener Art*, was mit Bezug auf die Mathematik als *eine aus sich selbst heraus geschaffene Wirklichkeit* aufgefasst werden kann. [13] Felgner schreibt dazu ganz in diesem Sinne in seiner Analyse von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“: [14]

> Damit aber die logische Analyse vollständig und einwandfrei ist, muß die Geometrie von allem *„Erdenrest“* befreit werden.

Gleichwohl ist es *aus didaktischer Sicht ideengeschichtlich interessant*, zu erfahren, welche Lösungsansätze in der griechischen Antike erdacht worden sind, um dieser „drei klassischen Probleme“ Herr zu werden. Das ist der Gegenstand der vorliegenden Darstellung.

2.3 Die drei klassischen Probleme in der Antike im zeitlichen Überblick

Es wurden also in der Geschichte der Mathematik rund 2400 Jahre lang *Versuche zum Lösen dieser klassischen Probleme mittels Zirkel und Lineal* unternommen – Versuche, die aus heutiger Sicht vergeblich waren. Die dabei dennoch entwickelten „Lösungen“ waren nur unter „Abänderung der Regeln“ [11] [12] bzw. durch Erfindung anderer „Werkzeuge“ zu gewinnen.

---

13 Siehe [Wittenberg 1990, 51].

14 [Felgner 2014, 202]; dieser „Erdenrest“ bezieht sich auf Goethes „Faust II“, 5. Akt.

Die Zeittafel in Bild 2.2 zeigt dazu einige ausgewählte wesentliche Etappen der Bearbeitungs- bzw. Lösungsversuche dieser drei klassischen Probleme in der griechischen Antike:

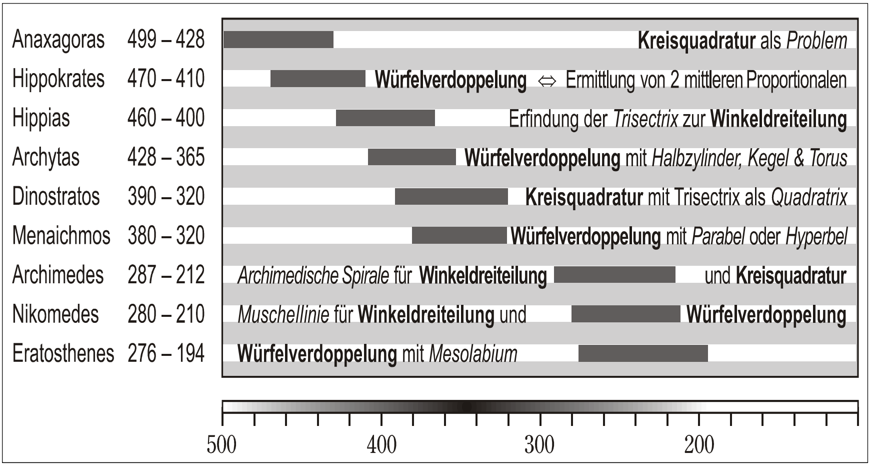


Bild 2.2: Die Behandlung der drei klassischen Probleme innerhalb dreier Jahrhunderte der griechischen Antike

2.3.1 Zum Problem der „Quadratur des Kreises"

Zunächst taucht die **Quadratur des Kreises** auf. Die Ägypter hatten zwar schon im 16. Jh. v. Chr. den Kreisflächeninhalt mit dem für praktische Zwecke bereits recht guten Wert von $(16/9)^2 \approx 3{,}16_0$ für π approximiert, [15] aber gemäß Plutarch (45 bis 125 n. Chr.) begegnet uns die Kreisquadratur als *mathematisches Problem* vermutlich erstmals bei dem Pythagoreer **Anaxagoras von Klazomenai**, der 434 v. Chr. in Athen aus politischen Gründen in Gefangenschaft geraten war und dort dann versuchte, einen Kreis konstruktiv zu „quadrieren".

So schreibt beispielsweise Cantor bezüglich Anaxagoras: [16]

> Er wird wohl, wie Viele nach ihm, die volle Quadratur zu erreichen gesucht haben. Aber auch darin liegt ein Verdienst, eine Aufgabe an die Tagesordnung gebracht zu haben, welche später als fruchtbringend sich erwies.

Die gewünschte und gesuchte Lösung dieser Aufgabe hätte Anaxagoras seiner Befreiung wohl kaum irgendwie näher gebracht, sie hatte also eher keinen praktischen Nutzen, und so wird diese Beschäftigung für ihn von spielerischer oder philosophischer Art gewesen sein.

---

15 Gemäß [Cantor 1894, 57]. Daher spricht Rudio in seinem Buch wohl von einem 4000 Jahre alten Problem (vgl. das zweite Zitat auf S. I).

16 [Cantor 1894, 161]; auch [van der Waerden 1956, 209 f.] erwähnt diese „Gefängnissituation".

Über die Zeittafel in Bild 2.2 hinaus ist **Antiphon** (480 – 411) zu erwähnen. Bei ihm finden wir die Idee, den *Kreisflächeninhalt* durch *einbeschriebene Vielecke* und durch eine *Eckenanzahlverdoppelung* zu approximieren, eine Methode, die von Eudoxos (aber nicht erst von Archimedes!) zur *Exhaustionsmethode* (der „Ausschöpfungsmethode") weiter ausgebaut worden ist. [17]

Gemäß **Bryson** von Alexandria (450 v. Chr. – ?) gibt es zwar zum Kreis ein „äußeres" bzw. ein „inneres" Quadrat, dessen Flächeninhalt größer bzw. kleiner als der des Kreises ist, und *deshalb* müsse ein zum Kreis flächengleiches Quadrat existieren – aber das ist nur eine (plausible!) Existenzaussage. Eine strenge Argumentation müsste hingegen die lineare bzw. totale Ordnung des Größensystems der Flächeninhalte und den Zwischenwertsatz heranziehen. [18]

2.3.2 Zum Problem der „Verdoppelung des Würfels"

Ist der Flächeninhalt manch ebener Figuren (wie z. B. bei einem Quadrat) bekannt, so ist es naheliegend, wie Anaxagoras auch nach dem Flächeninhalt eines Kreises zu fragen. Doch was mag die Veranlassung gewesen sein, die Frage nach der **Verdoppelung des Würfels** zu stellen?

Moritz Cantor zitiert hierzu aus einem Brief, den angeblich **Eratosthenes** nach einem Bericht von **Eutokios** [19] (ca. 480 – ca. 540) an den ägyptischen König Ptolemaios geschrieben habe: [20]

> Dem Könige Ptolemäus wünscht Eratosthenes Glück und Wohlergehen. Von den alten Tragödiendichtern, sagt man, habe einer den Minos, wie er dem Glaukos ein Grabmal errichten liess, und hörte, dass es auf allen Seiten 100 Fuss haben werde, sagen lassen:
>
> Zu klein entwarfst Du mir die königliche Gruft,
> Verdopple sie; des Würfels doch verfehle nicht.
>
> Man untersuchte aber auch von Seiten der Geometer, auf welche Weise man einen gegebenen Körper, ohne dass er seine Gestalt veränderte, verdoppeln könnte, und nannte die Aufgabe der Art des Würfels Verdoppelung; denn einen Würfel zu Grunde legend suchte man diesen zu verdoppeln.

Die beiden einleitenden Absätze in diesem Zitat können aus heutiger mathematikhistorischer Sicht allenfalls als anekdotisch hübsche Verpackung gelten. Insbesondere wird gemäß Felgner die *Echtheit dieser Verse oft bestritten*, vor allem

---

[17] Fälschlich wird hier meist Archimedes genannt. (Mit Dank an Ulrich Felgner für diesen Hinweis.)

[18] Mit dem Hinweis in diesem Satz an mich vom 11. 05. 2013 relativiert Ulrich Felgner die historische Rolle Brysons; [Boehme 2013] erörtert eine mögliche Rekonstruktion von Brysons Quadratur.

[19] Und zwar in Eutokios' Kommentar zur archimedischen Schrift über *„Kugel und Zylinder"* in Band III der von Heiberg herausgegebenen Werke des Archimedes. Siehe auch S. 29, Fußnote 51.

[20] [Cantor 1894, 199]; dieses Zitat findet man seit Anfang des 20. Jhs. in vielen Publikationen.

aber seien die *Verse von Cantor sehr schlecht übersetzt.* [21] Felgner schreibt dazu ergänzend in derselben Mitteilung:

> Im Eratosthenes zugeschriebenen Brief werden drei (nicht zwei!) Verse aus einem „alten antiken Tragiker“ zitiert. In den Versen wird aber überhaupt nicht von einem Würfel (oder Kubus) gesprochen. Sie lauten wörtlich übersetzt:
>
> Zu klein hast Du den [eingehegten heiligen] Bereich (σηκός) der königlichen Gruft entworfen, // Er soll doppelt so groß sein, doch soll ihm dabei seine Schönheit (καλός: Ebenmäßigkeit) nicht genommen werden. //
> Verdopple geschwind (ἐν τάχει) jede Seite (κῶλον).
>
> Dabei geben die Wörterbücher an, daß „κῶλον” („kolon“, Glied) auch im übertragenen Sinne „die zweite Hälfte der Laufbahn“ und daher auch „die Seite der Grundfläche“ meinen kann. Daraus ergibt sich, daß in den drei Versen gar nicht von der Würfelverdopplung die Rede ist, sondern nur in einem sehr naiven Sinne von der „Verdopplung“ des eingefriedeten ebenen Bereichs durch Verdopplung der Seitenlängen. Moritz Cantor interpretiert die Forderung der Ebenmäßigkeit als Verdopplung der Form eines Würfels. Aber in den Versen des „alten Tragikers“ steht das gar nicht.
>
> Eratosthenes fährt fort und rügt König Minos, daß dabei aber die Grundfläche vervierfacht und das gesamte Volumen verachtfacht wird.
>
> Sodann spricht er von den Bemühungen der Geometer herauszufinden, wie man denn einen Würfel richtig in seinem Volumen verdoppelt, und erwähnt dafür Hippokrates etc. und kommt dann auch auf das Delische Problem zu sprechen. Ich ziehe daraus den folgenden Schluß: Die zitierten Verse verwendet Eratosthenes, um in das Problem der Würfelverdopplung einzusteigen und klar zu machen, daß man mit der Verdopplung der Seitenlängen keinen Würfel dem Volumen nach verdoppelt etc. Am Ende will er sein eigenes Mesolabium vorstellen, mit dem man die Seitenlänge eines doppelt so großen Würfels herstellen („ergreifen“) kann.
>
> **Mesolabium** = „Ergreifer der Mitte“;
>
> (mesos (μέσος) = mitten, in der Mitte, & labein (λαβεῖν) = ergreifen).

Allerdings weist der wesentliche letzte Absatz in Cantors Zitat *(„Man untersuchte aber auch von Seiten der Geometer ...“)* auf ein *mathematisches Problem* hin, das vermutlich um 450 v. Chr. aufgetaucht ist: [22]

So war bereits im 5. Jh. v. Chr. die *„Verdoppelung des Quadrats“* als Problem erkannt und auch sofort gelöst worden, und auch später noch wird diese Frage bekanntlich im (vermutlich 385 v. Chr. geschriebenen) „Menon“ von Platon thematisiert.

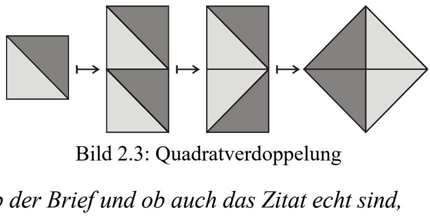


Bild 2.3: Quadratverdoppelung

[21] Felgner schrieb mir am 11. 05. 2013: *„Ob der Brief und ob auch das Zitat echt sind, wird in der Literatur oft bestritten. Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff (Kleine Schriften, II) und van der Waerden (Erwachende Wissenschaft, 1966, pp. 263 ff.) haben die Echtheit des Briefes vehement bestritten und Snell & Kannicht haben die Euripides zugeschriebenen Verse im 2. Band (Seite 62) ihrer umfangreichen Sammlung von antiken Fragmenten unter die „Adespota“ (dort Nr. 166) eingereiht.“*

[22] Mit Dank an Ulrich Felgner auch für diesen wichtigen Hinweis.

Es liegt dann auf der Hand, auch nach der *„Verdoppelung eines Würfels“* zu fragen. Bild 2.3 zeigt dazu eine mögliche Schrittfolge „ohne Worte“ für eine Prozedur zur Quadratverdoppelung.

Hippokrates von Chios (nicht zu verwechseln mit dem durch den „Eid“ bekannten Hippokrates von Kos) leistete nun einen ganz wesentlichen Beitrag zur Problemlösung, indem er zeigte, dass dieses Problem äquivalent ist zu demjenigen der Bestimmung von zwei *mittleren Proportionalen* zweier Größen. [23] Cantor beschreibt das im Anschluss an das obige Zitat: [20]

> Während nun lange Zeit hindurch Alle rathlos waren, entdeckte zuerst [...] Hippokrates, dass, wenn man herausbrächte zu zwei gegebenen graden Linien, wo die grössere der kleineren Doppelte wäre, zwei mittlere Proportionalen von stetigem Verhältnisse zu ziehen, der Würfel verdoppelt werden könnte; […]

Mit „graden Linien“ sind „Strecken“ gemeint. Bemerkenswert ist, dass Hippokrates einen Zusammenhang zwischen zwei Volumina auf einen zwischen zwei Streckenlängen reduziert!

2.3.3 Zum Problem der „Dreiteilung eines Winkels“

Hippias von Elis erfand 420 v. Chr. eine kinematisch erzeugte Kurve, mit der er das Problem der *Winkeldreiteilung* „löste“. Diese Kurve wurde daher später *Trisectrix* genannt. **Dinostratos** gelang im folgenden Jahrhundert das Kunststück, mit der *Trisectrix* des Hippias das *Problem der Quadratur des Kreises* zu „lösen“, und so ging diese Kurve später auch als *Quadratrix* in die Literatur ein.

Moritz Cantor schreibt hierzu: [24]

> Hippias, und zwar Hippias von Elis, hat um 420 etwa eine Curve erfunden, welche zu doppeltem Zwecke dienen konnte, zur Dreitheilung eines Winkels und Quadratur des Kreises. Von letzterer Anwendung erhielt sie ihren Namen, Quadratrix, wie er in lateinischer Übersetzung zu lauten pflegt, aber dieser Name scheint nicht über Dinostratus hinaufzureichen, dessen Zeitalter als Bruder des Menächmus, eines Schülers des Eudoxus von Knidos etwa in die zweite Hälfte des IV. S. gesetzt werden muss. Ob die Curve früher einen anderen Namen führte, ob sie überhaupt mit Namen genannt wurde, wissen wir nicht. Der erste ganz gesicherte Name einer von der Kreislinie verschiedenen krummen Linie wird uns am Anfang des zweiten Drittels des IV. S., annähernd 20 bis 30 Jahre vor Dinostratus begegnen […]. Ist aber der Name Quadratrix erst nachträglich der Curve des Hippias beigelegt worden, so schwindet die Nothwendigkeit anzunehmen, sie sei zum Zwecke der Kreisquadratur erfunden worden, und man darf ihren ursprünglichen Zweck in dem suchen, was nach Proklus durch sie zu verwirklichen war, in der Dreitheilung des Winkels.

Die von Hippias zur Winkeldreiteilung erfundene (und damals wohl noch namenlose) *ebene Kurve* trat also historisch zuerst auf, zur Kreisquadratur wurde sie ein Jahrhundert später von Dinostratos verwendet, und den Namen „Quadratrix“ erhielt sie wohl ein weiteres Jahrhundert später von **Nikomedes**:

---

[23] Dies wird in Abschnitt 5.1 1behandelt.

[24] [Cantor 1894, 183 f.]

> […] indeed, it was Nicomedes, according to Iamblichus, who appears to be responsible for naming the curve "quadratrix" *(tetragŏnizousa)* in recognition of its role in the quadrature of the circle. One wonders what was left for Nicomedes to do, however, if Hippias the Sophist had so advanced the study of this curve more than two centuries earlier. [25]

Wie mag es nun in der griechischen Antike dazu gekommen sein, dass sich im 5. Jahrhundert v. Chr. bereits die älteren Pythagoreer auch mit dem Problem der *Winkeldreiteilung* befassten? Cantor schreibt dazu mutmaßend: [26]

> Dass diese Aufgabe selbst auftauchte, kann uns nicht in Verwunderung setzen. Wir haben […] gesehen, dass die Construction regelmässiger Vielecke eines der geometrischen Lieblingsgebiete der Pythagoräer bildete. Die Theilung des ganzen Kreisumfanges in 6, in 4, in 5 gleiche Theile wurde gelehrt, und namentlich letztere als bedeutend schwieriger erkannt als die anderen längst bekannten Theilungen. Eine überwundene Schwierigkeit reizt zur Besiegung anderer, und so mag das Verlangen wach geworden sein nicht mehr den ganzen Kreis, sondern einen beliebigen Kreisbogen in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. Schon bei der Dreitheilung traten unbesiegbare Schwierigkeiten auf. Versuche diese Aufgaben mit Zirkel und Lineal zu lösen mögen angestellt worden sein. Es ist uns nichts von ihnen bekannt geworden. Sie mussten erfolglos bleiben. Aber das zweite grosse Problem der Geometrie des Alterthums neben der Quadratur des Kreises, deren wir bei Anaxagoras gedenken mussten, war gestellt, und wie in der Geschichte der Mathematik fast regelmässig zunächst unlösbaren Aufgaben zu Liebe neue Methoden sich entwickelten und kräftigten, so führte die Dreitheilung des Winkels […], die Trisektion, wie man gewöhnlich sagt, zur Erfindung der ersten von der Kreislinie verschiedenen, durch bestimmte Eigenschaften gekennzeichneten und in ihrer Entstehung verfolgbaren krummen Linie.

Mit dieser eigens zur Winkeldreiteilung erfundenen „krummen Linie" ist die o. g. *Trisectrix* gemeint, die ja auch *Quadratrix* heißt (s. o.).

2.3.4 Überblick: exakte Lösungen und Näherungslösungen der Probleme

Archytas hat als erster das Problem der *Würfelverdoppelung* exakt „gelöst", und zwar mit Hilfe einer als Schnitt eines Halbzylinders und eines Achteltorus erzeugten *Raumkurve* unter Zuhilfenahme eines Kegels und der erwähnten Problemreduktion von **Hippokrates** auf die Ermittlung von zwei mittleren Proportionalen zweier Streckenlängen.

Menaichmos, ein Bruder von Dinostratos, gab zwei Verfahren zur „Lösung" des Problems der *Würfelverdoppelung* an, und zwar einerseits durch den *Schnitt einer Parabel mit einer Hyperbel* und andererseits durch den *Schnitt von zwei Parabeln*.

Nikomedes erfand die *Konchoïden* („Muschellinien"), die sowohl der *Winkeldreiteilung* als auch der *Würfelverdoppelung* gedient haben.

- All dies sind *exakte Lösungen* der jeweiligen klassischen Probleme!

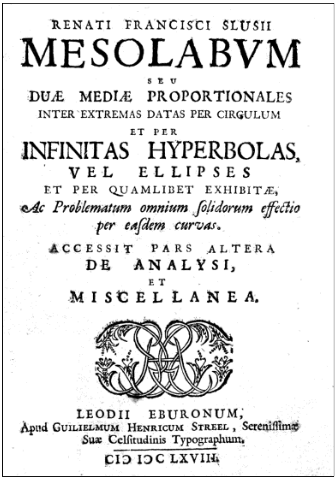
---

25 [Knorr 1986, 81]
26 [Cantor 1894, 184]

Daneben gibt es auch *Näherungslösungen* der drei Probleme:

- So gelang vermutlich bereits **Hippokrates** die *Würfelverdoppelung* mittels zweier Winkelhaken.
- **Archimedes** ist uns u. a. durch die von ihm erfundene und nach ihm benannte *Archimedische Spirale* bekannt. Diese Kurve ist elegant zur *Winkeldreiteilung* nutzbar, aber Archimedes konnte darüber hinaus zeigen, dass mit ihrer Hilfe ebenfalls die *Quadratur des Kreises* „gelöst" werden kann – dass sie also ähnlich wie die Trisectrix bzw. die Quadratrix sowohl zur Winkeldreiteilung (**Hippias**) als auch zur Kreisquadratur (**Dinostratos**) geeignet ist, was erstaunlich ist, erscheinen doch diese Probleme jeweils als geometrisch grundverschieden.
- **Archimedes** stellte ein elegantes Einschiebeverfahren zur *Winkeldreiteilung* vor, und **Eratosthenes**, aus der Zahlentheorie wohlbekannt durch sein „Sieb" zur Primzahlberechnung, „löste" das Problem der *Würfelverdoppelung* mit seinem *„Mesolabium"*, das er stolz dem Ptolemaios-Tempel in Alexandrien als Ausstellungsstück vermachte; [27] vermutlich hat er auch einen hölzernen Einschiebeapparat zur *Würfelverdoppelung* erfunden (was fälschlicherweise Platon zugeschrieben wurde [28]).

Eudoxos von Knidos soll mit Hilfe sog. „Bogenlinien" den Würfel verdoppelt haben, doch leider ist nicht überliefert, was diese Bogenlinien sein sollen und wie er vorgegangen ist.


RENATI FRANCISCI SLUSII
MESOLABVM
SEU
DUÆ MEDIÆ PROPORTIONALES
INTER EXTREMAS DATAS PER CIRCULUM
ET PER
INFINITAS HYPERBOLAS,
VEL ELLIPSES
ET PER QUAMLIBET EXHIBITÆ,
Ac Problematum omnium ſolidorum effectio
per eaſdem curvas.
ACCESSIT PARS ALTERA
DE ANALYSI,
ET
MISCELLANEA.

LEODII EBURONUM,
Apud GUILIELMUM HENRICUM STREEL, Sereniſſimæ
Suæ Celſitudinis Typographum,
CIↃ IↃC LXVIII.

Bild 2.4: Titelblatt aus [de Sluze 1668]

---

27 Bild 2.4 zeigt das Titelblatt des Buches, das René de Sluze dem Mesolabium widmete.

28 Zu den Winkelhaken siehe Abschnitt 5.5; zum „hölzernen Apparat" siehe Abschnitt 5.2 auf S. 32 f.; zu Platon siehe das Zitat von Felgner zu Fußnote 65 auf S. 35.