

Inhalt

1	Mathematik kulturhistorisch begreifen	1
1.1	Mathematik zwischen Anwendung und Spiel	1
1.1.1	Vorbemerkung	1
1.1.2	Das Morley-Dreieck zwischen Anwendung und Spiel	2
1.1.3	Mathematik zwischen „homo faber“ und „homo ludens“	4
1.1.4	Mathematik und das Menschenrecht auf Irrtum	5
1.1.5	Ein Blick in die Anfänge der Geometrie	7
1.1.5.1	<i>Geometrisches Handeln in vorgeschichtlicher Zeit</i>	7
1.1.5.2	<i>Am Beginn geschichtlicher Zeit</i>	10
1.1.5.3	<i>Ein kurzer Blick in andere Kulturen: China, Japan und Neuseeland</i>	12
1.1.6	Einige aktuelle Beispiele	13
1.1.6.1	<i>Raumgeometrie und Raumanschauung</i>	13
1.1.6.2	<i>Inzidenzgeometrie und Endliche Geometrie</i>	15
1.1.6.3	<i>Tropische Geometrie</i>	16
1.1.6.4	<i>Freiformarchitektur und Mathematik</i>	18
1.1.7	Fazit	18
1.2	Mathematik im kulturhistorischen Kontext	19
1.2.1	Fundamentale Ideen und grundlegende Begriffe	19
1.2.1.1	<i>Grundsätzliche Betrachtungen</i>	19
1.2.1.2	<i>Kriterien bezüglich fundamentaler Ideen</i>	21
1.2.1.3	<i>Ein Beispiel: „Mittelwert & Mittelwertbilden“ und Konsequenzen</i>	22
1.2.2	Historische Verankerung	24
1.2.2.1	<i>Verankernde Ideen</i>	24
1.2.2.2	<i>Otto Toeplitz: „genetische Methode“ als didaktisches Konzept</i>	25
1.2.3	Fazit: „historische Verankerung“ statt „genetische Methode“	28
1.3	Mathematik, Begriff und Begriffsbildung	32
1.3.1	Was ist ein Begriff? – Ein erster Zugang und Gottlob Frege	32
1.3.2	Begriffsbildung als Prozess	34
1.3.2.1	<i>Begriffsbildung in ontogenetischer und in kulturhistorischer Sicht</i>	34
1.3.2.2	<i>Aspektvielfalt von „Begriffsbildung“ im mathematikdidaktischen Kontext</i>	35
1.3.2.3	<i>Phasen der Begriffsbildung</i>	37
1.3.2.4	<i>Das epistemologische Dreieck</i>	39
1.3.3	Fazit	40

2	Grundlagen mathematischer Strukturen	41
2.1	Überblick	41
2.2	Algebra: vom Verfahren zur Struktur – und wieder zurück	41
2.2.1	Elementare algebraische Strukturen in naiver Sicht	41
2.2.2	Die grundlegende Wende in der „Algebra“: vom Verfahren zur Struktur	42
2.2.3	„Algebra“: zur Entstehung der Bezeichnung	43
2.2.4	Cardano und seine Formeln	45
2.2.5	„Gruppen“: wie es dazu kam	46
2.2.5.1	<i>Gleichungslehre: mit Permutationen von Cardano über Hudde bis zu Abel und Galois</i>	47
2.2.5.2	<i>Felix Klein und die Geometrie: Invarianten bei Bewegungen</i>	55
2.2.5.3	<i>Gauß, Lagrange und die Zahlentheorie: Quadratische Formen</i>	56
2.2.5.4	<i>Gruppen bei Cayley und Weber: die Geburt der modernen Algebra</i>	58
2.3	Logik und Mengen	59
2.3.1	Vorbemerkung	59
2.3.2	Aussagen und „klassische“ Aussagenlogik	59
2.3.3	Aussagenlogische Junktoren	64
2.3.3.1	<i>Das aussagenlogische NICHT</i>	64
2.3.3.2	<i>Das aussagenlogische UND – die Konjunktion</i>	66
2.3.3.3	<i>Das aussagenlogische ODER – Adjunktion und Disjunktion</i>	67
2.3.3.4	<i>Das aussagenlogische WENN ... DANN – die Subjunktion</i>	67
2.3.3.5	<i>Das aussagenlogische GENAU DANN ... WENN – die Bijunktion</i>	68
2.3.3.6	<i>Gegensätze: „konträr“ versus „kontradiktorisch“</i>	68
2.3.4	Aussagenkalkül und aussagenlogische „Gesetze“	68
2.3.5	Quantoren und Variablenbindung	71
2.3.6	Zur „Ersetzungsregel“ und einer Konsequenz	72
2.3.7	Mengen	73
2.3.7.1	<i>Zur Entstehung der Mengenlehre</i>	73
2.3.7.2	<i>Mengen – grundlegende Notationen und Definitionen</i>	77
2.3.7.3	<i>Extensionalitätsprinzip und Mengeninklusion</i>	79
2.3.7.4	<i>Aussonderungsprinzip und leere Menge</i>	79
2.3.8	Mengenalgebra	81
2.3.8.1	<i>Verknüpfungen von Mengen und Venn-Diagramm</i>	81
2.3.8.2	<i>Potenzmengen</i>	84
2.3.8.3	<i>Mengenalgebra als Struktur</i>	85
2.3.9	Paarmengen und Produktmengen	88
2.3.10	Erste Anmerkungen zur „axiomatischen Mengenlehre“	90
2.3.11	Vage Logik (Fuzzy Logic) – ein kurzer Einblick	91

3	Zu den historischen Wurzeln des Zahlbegriffs	95
3.1	Was ist eine Zahl?	95
3.1.1	Subjektive Theorien zum Zahlbegriff	95
3.1.2	Vertiefende Diskussion	96
3.1.3	Aspekte von Begriffsbildung	98
3.2	Zum Zahlbegriff in vorgeschichtlicher Zeit	98
3.3	Zum Zahlbegriff in der Antike	100
3.3.1	Babylonische Keilschrifttafeln	100
3.3.1.1	<i>Grundsätzliches</i>	100
3.3.1.2	<i>Yale YBC 7289</i>	101
3.3.1.3	<i>Plimpton 322</i>	102
3.3.2	In Kürze: zur Arithmetik der alten Ägypter	104
3.3.3	Hatten Babylonier und Ägypter schon einen „Zahlbegriff“?	105
3.3.4	Pythagoreer: Größenverhältnisse als Proportionen	106
3.3.4.1	<i>Pythagoreer: Mathematik als „freie Wissenschaft“, als „Spiel des Geistes“</i>	106
3.3.4.2	<i>Zum Zahlenverständnis der Pythagoreer – Eins ist keine „Zahl“!</i>	107
3.3.4.3	<i>„Alles ist Zahl“</i>	108
3.3.4.4	<i>Wechselwegnahme und größtes gemeinsames Maß</i>	110
3.3.4.5	<i>Pythagoreische Mittelwerte und babylonischer Approximationsalgorithmus</i>	111
3.3.4.6	<i>Babylonischer Algorithmus und Heron-Verfahren</i>	113
3.3.5	Die Entdeckung der Irrationalität durch Hippasos von Metapont	114
3.3.5.1	<i>Das Pentagramm der Pythagoreer</i>	114
3.3.5.2	<i>Hippasos von Metapont und das Pentagon</i>	115
3.3.5.3	<i>Wechselwegnahme bei Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck</i>	116
3.3.5.4	<i>Inkommensurabilität und Konsequenzen für die Verhältnigleichheit</i>	117
3.3.5.5	<i>Irrationalität</i>	120
3.3.5.6	<i>Alternativen zur Entdeckung der Inkommensurabilität?</i>	122
3.3.5.7	<i>Ergänzungen</i>	124
3.4	Fazit	125
4	Zur Kulturgeschichte des Funktionsbegriffs	127
4.1	Was ist eine Funktion? – Problematisierung	127
4.2	Zeittafel zur Entwicklung des Funktionsbegriffs	131

4.3	Markante Etappen bei der Entwicklung des Funktionsbegriffs	132
4.3.1	Babylonier	132
4.3.2	Griechische Antike und Mittelalter – von kinematischen Kurven bis hin zu zeitachsenorientierten Darstellungen	132
4.3.2.1	<i>Griechische Antike: kinematisch erzeugte Kurven als Funktionen</i>	133
4.3.2.2	<i>Erstes Auftreten zeitachsenorientierter Darstellungen gegen 1000 n. Chr.</i>	134
4.3.2.3	<i>Darstellung zeitabhängiger Größen durch Nicole d' Oresme</i>	137
4.3.3	Neuzeit: auf dem Weg zur Begriffsentwicklung – empirische Daten und formale Ansätze von 1500 bis Anfang des 19. Jhs.	140
4.3.4	19. und 20. Jahrhundert: die Phase der Entwicklung des modernen Funktionsbegriffs	149
4.4	Funktionen – die aktuelle große Vielfalt	156
4.4.1	Funktion als Relation – oder?	156
4.4.2	Aktuelle Gesichter von Funktionen	158
4.4.2.1	<i>Rückblick und Konsequenz</i>	158
4.4.2.2	<i>Hörbare Funktionen</i>	158
4.4.2.3	<i>Digitalisierung und Diskretisierung als Funktionen</i>	160
4.4.2.4	<i>Sichtbare Funktionen</i>	162
4.5	Fazit	163
4.6	Rückblick und didaktischer Ausblick: „Funktion als Tabelle“	164
5	Strukturierung durch Relationen und Funktionen	165
5.1	Relationen und Funktionen – grundlegende Definitionen	165
5.1.1	Vorbetrachtungen zur Definitionsfindung	165
5.1.2	Binäre und mehrstellige Relationen	166
5.1.3	Funktionen	168
5.1.4	„Mehrstellige Funktionen“ versus „Funktionen mehrerer Veränderlicher“?	176
5.1.5	Binäre Operationen (Verknüpfungen) und mehrstellige Operationen	177
5.1.6	Verkettung von Relationen	179
5.2	Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen	181
5.2.1	Grundlegende Eigenschaften von binären Relationen – Formalisierung und Visualisierung	181
5.2.2	Quotientenmengen und Zerlegungen	184
5.2.3	Halbordnung, Totalordnung, Striktordnung, Trichotomie, Wohlordnung	188

5.3	Strukturierung und Axiomatik – Grundsätzliches	192
5.3.1	Axiomatische Methode	192
5.3.1.1	<i>Was sind Axiome?</i>	192
5.3.1.2	<i>Was ist Axiomatik?</i>	194
5.3.1.3	<i>Deduktion, Induktion und Abduktion</i>	194
5.3.2	Axiomensysteme	195
5.3.2.1	<i>Anforderungen an ein Axiomensystem</i>	195
5.3.2.2	<i>Widerspruchsfreiheit</i>	196
5.3.2.3	<i>Unabhängigkeit</i>	197
5.3.2.4	<i>Vollständigkeit</i>	198
5.3.3	„Modell“ und „Modellierung“ – (wie) passt das zusammen?	198
5.3.4	Mengenalgebra als Boolesche Algebra	199
5.3.5	Zur Unabhängigkeit eines Axiomensystems am Beispiel von Gruppen	200
6	Natürliche Zahlen in axiomatischer Sichtweise	207
6.1	Was sind natürliche Zahlen?	207
6.2	Die Nachentdeckung der Dedekind-Peano-Axiome	209
6.3	Abstraktion: Dedekind-Peano-Algebra	213
6.4	Analyse von Dedekind-Peano-Algebren	217
6.4.1	Vollständige Induktion	217
6.4.2	Unabhängigkeit der Dedekind-Peano-Axiome	219
6.4.3	Homomorphismen in Dedekind-Peano-Algebren	220
6.4.4	Der Monomorphiesatz für Dedekind-Peano-Algebren	226
6.4.5	Der Rekursionssatz	228
6.5	Der angeordnete Halbring der natürlichen Zahlen	230
6.6	Endlichkeit und Abzählbarkeit	235
7	Brüche und Bruchentwicklungen	239
7.1	Was ist eigentlich ein „Bruch“? — Erste vorsichtige Ansätze	239
7.1.1	Vorgeschichte	239
7.1.2	Paradoxien bei Brüchen — das Chuquetmittel	239
7.1.3	Etymologische Aspekte	242
7.1.4	Erste historische Aspekte	242

7.1.5	Was ist ein Bruch? — (Typische?) Schlaglichter einer Umfrage	243
7.1.6	Wir tasten uns heran — erste algebraische Aspekte	244
7.1.7	Strukturmathematische Präzisierung	246
7.1.8	Brüche und „Aufbau des Zahlensystems“	249
7.1.9	Die Menge der Bruchzahlen	250
7.1.10	Wohldefiniertheit bei Bruchverknüpfungen	253
7.2	Grundvorstellungen bei Brüchen	255
7.2.1	Vorbemerkung	255
7.2.2	Einige Einstiegsbeispiele	255
7.2.3	Bruch als „Teil eines Ganzen“ oder als „Teil mehrerer Ganzer“	256
7.2.4	Quasikardinaler Aspekt bei Brüchen	259
7.2.5	Quasiordinaler Aspekt bei Stammbrüchen	260
7.2.6	Bruch als (Zahlen-)Verhältnis	261
7.2.7	Bruch als Vergleichsinstrument — der „von-Ansatz“	262
7.2.8	Subjektive Erfahrungsbereiche	263
7.3	Vorstellungen und Darstellungen von (Bruch-)Zahlen	267
7.3.1	Gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche	267
7.3.2	Brüche als Namen für Zahlen	268
7.3.3	Konkrete und abstrakte Brüche	269
7.3.4	Gleichwertigkeit konkreter Brüche	270
7.3.5	Bruchzahlen als „Zahlen“?	270
7.4	Bruchrechnung	271
7.4.1	Vorbemerkung	271
7.4.2	Erweitern und Kürzen	271
7.4.3	Größenvergleich von Brüchen	276
7.4.4	Addition von Brüchen	279
7.4.5	Subtraktion von Brüchen	285
7.4.6	Multiplikation von Brüchen	286
7.4.7	Einbettung der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen	290
7.4.8	Identifizierung von Bruchschreibweise und Divisionsschreibweise	290
7.4.9	Division von Brüchen	291
7.4.10	Doppelbrüche	296

7.5	Bruchentwicklungen	297
7.5.1	Vorbemerkung	297
7.5.2	Stammbruchentwicklungen	298
7.5.3	Kettenbruchentwicklungen	304
7.5.4	Farey-Folgen und Fordkreise	307
8	Struktur der Zahlenbereiche	309
8.1	Ganze Zahlen und rationale Zahlen	309
8.1.1	Unvollständigkeiten des angeordneten Halbrings der natürlichen Zahlen	309
8.1.2	Einbettung — eine Übersicht	310
8.1.3	Konstruktion des Rings der ganzen Zahlen — Skizze	312
8.1.4	Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen — Skizze	316
8.2	Der archimedisch angeordnete, unvollständige Körper der rationalen Zahlen	318
8.2.1	Der angeordnete Ring der ganzen Zahlen	318
8.2.2	Der angeordnete Körper der rationalen Zahlen	320
8.2.3	Dichtheit des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen	321
8.2.4	Archimedizität des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen	324
8.2.5	Folgenkonvergenz in angeordneten Körpern	328
8.2.6	Unvollständigkeit des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen	336
8.3	Konstruktion der reellen Zahlen über Fundamentalfolgen	339
8.3.1	Der Körper der reellen Zahlen	339
8.3.2	Der archimedisch angeordnete Körper der reellen Zahlen	341
8.3.3	Zur Vollständigkeit des Axiomensystems der reellen Zahlen — Übersicht	344
8.3.4	Zur Monomorphie des Axiomensystems der reellen Zahlen	345
8.4	Ergänzungen und Ausblick	346
8.4.1	Axiomatische Kennzeichnung der reellen Zahlen und der Unterstrukturen	346
8.4.2	Äquivalente Fassungen des Vollständigkeitsaxioms der reellen Zahlen	349
8.4.3	Alternative Konstruktionsmöglichkeiten der reellen Zahlen	352
8.4.4	Reelle Zahlen: „Konstruktion“ versus „axiomatische Kennzeichnung“	352
8.4.5	Abzählbarkeitsfragen	353
8.4.6	Komplexe Zahlen und Quaternionen	360
9	Zu den Lösungen der Aufgaben	365
10	Literatur	403
11	Index	411
12	Symbolverzeichnis	425

