Vorwort

Mathematikunterricht lebt von Ideen, und diese wiederum entwickeln sich in Wechselwirkung mit Begriffen, deren Verständnis unabdingbare Voraussetzung für mathematische Einsichten ist.

Mathematische Begriffe sind jedoch weder absolut noch starr, sondern sowohl in kultur- und wissenschaftsgeschichtlicher als auch in anwendungs- und kontextbezogener Hinsicht dynamisch und vielfältig. Daher ist eine Kenntnis der Entwicklung mathematischer Begriffe im Sinne einer „historischen Verankerung“ förderlich für das Verständnis mathematischer Ideen — und zwar sowohl für Unterrichtende als auch für Lernende.

Diese Auffassung ist tragend für das vorliegende Werk über die Grundbegriffe der Analysis, deren Anfänge ja in die Antike zurückreichen. Insbesondere wird dem klassifizierenden Aspekt des Begriffsbildungsprozesses durch zahlreiche Beispiele Rechnung getragen.

Die Begrifflichkeit der Analysis wird dabei nicht „linear“ entwickelt, da die Kenntnis derselben bei der Leserschaft vorausgesetzt wird, vielmehr sind die Wechselbeziehungen im Begriffsgefüge von Interesse.

Das Werk ist in sechs Kapitel gegliedert:

Kapitel I widmet sich den *reellen Zahlen*. Zunächst wird die Begriffsgenese von der Antike bis hin zu Dedekind und Hilbert erörtert, ergänzt durch axiomatische Charakterisierungen von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$, insbesondere durch unterschiedliche Charakterisierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Betrachtungen zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ und zu Irrationalitätsbeweisen, Kettenbruchentwicklungen und Abzählbarkeitsfragen runden dieses Kapitel ab.

In **Kapitel II** werden die für die Analysis grundlegenden Begriffe *Funktion, Folge* und *Reihe* in ihrer historischen Entwicklung dargestellt. Breiter Raum wird dabei den historisch und auch aktuell bedeutsamen arithmetischen, geometrischen und harmonischen Folgen und Reihen und darauf aufbauend den figurierten Zahlen, den Potenzsummen und Zahlendreiecken gewidmet. Algebraische Aspekte beim Rechnen mit Folgen und Funktionen beschließen das Kapitel.

In **Kapitel III** wird dargelegt, wie es zur Entwicklung des *Grenzwertbegriffs* kam. Besonderer Wert wird hier neben historischen Beispielen und Trugschlüssen auf die vergleichende Darstellung heute üblicher und für die Schule möglicher Begriffsbildungen gelegt.

Die *Stetigkeit* erweist sich in **Kapitel IV** als historisch ältester Grundbegriff der Analysis (verglichen mit Grenzwert, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit). Analog zum Grenzwertbegriff wird eine Gegenüberstellung verschiedener heutiger Begriffsbildungen präsentiert. Schließlich werden topologische Aspekte und der Kurvenbegriff untersucht, und alles wird durch zahlreiche, oft auch obskure, Beispiele ausgelotet.

Kapitel V ist der *Differenzierbarkeit* gewidmet. Die Anfänge der Differentialrechnung von Fermat über Hudde, Barrow, Newton, Leibniz, Joh. Bernoulli, Euler bis hin zu d'Alembert werden skizziert, und heute übliche, für den Schulunterricht mögliche, Begriffsfassungen werden vergleichend gegenübergestellt. Auch hier dienen verrückte Beispiele wie „überall stetige nirgends differenzierbare Funktionen" der Vertiefung des Begriffsverständnisses. Schuladäquate Wege zur Entwicklung der Ableitung von transzendenten Funktionen wie sin, cos, exp und ln werden aufgezeigt, und schließlich wird auf Einstiegsfragen, Extremwertaufgaben, den Mittelwertsatz, die Taylor-Entwicklung, die implizite Differentiation und auf Differentiale eingegangen.

Kapitel VI beschäftigt sich mit der *Integrierbarkeit* und führt damit alle Begriffe zusammen. Antike Quadraturfragen eröffnen das Thema und führen über Cavalieri und Guldin mit einem großen Sprung zu heutigen Integrierbarkeitsbegriffen: Riemann-Darboux-Integral und Regelfunktionen. Das Lebesgue-Integral wird nur angedeutet, weil es wohl für die Schule wenig bedeutsam ist. Die Stellung des Hauptsatzes und — damit verbunden — die Frage nach der Reihenfolge der unterrichtlichen Behandlung von Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit wird diskutiert. Schließlich werden geometrische Anwendungen, uneigentliche Integrale, numerische Integration und Differentialgleichungen angesprochen.

Das vorliegende Buch ist eine grundlegende Neubearbeitung eines früheren Buchs der Autoren (*Materialien zum Analysis-Unterricht*, Freiburg 1982), welches schon seit einigen Jahren nicht mehr erhältlich ist. Neuere Einsichten und die Entwicklung auf dem Gebiet der Didaktik der Analysis veranlaßten uns, diese Neubearbeitung vorzulegen.

Braunschweig/Wuppertal,
im November 1994 — Horst Hischer / Harald Scheid