

Horst Hischer, Braunschweig

Klassische Probleme der Antike — Beispiele zur „Historischen Verankerung“

Geschichte der Mathematik kann ein spannender didaktischer Aspekt zur methodischen Gestaltung von Unterricht sein. Durch eine solche „historische Verankerung“ wird eine *innermathematische Beziehungshaltigkeit* (FREUDENTHAL, WITTMANN) erreicht, die eine Belegung der methodischen Variablen „Verbindung“ von VOLLRATH darstellt.

Das Konzept der historischen Verankerung wird an ausgewählten Beispielen aus dem propädeutischen Analysisunterricht exemplarisch dargestellt: „Die Entdeckung der Irrationalität am Pentagramm und Pentagon“ ist ein Unterrichtsbeispiel für den Sekundarbereich I, während die „Winkeldreiteilung“ und die „Quadratur des Kreises“ als zwei der „drei berühmten klassischen Probleme“ und ihre Lösung mit Hilfe der Trisectrix bzw. der Quadratrix ein Unterrichtsbeispiel für die gymnasiale Oberstufe bilden.

1 Das Pentagramm

1.1 Das Pentagramm in der Antike

Ich beginne mit einem Sprung um rund 2500 Jahre zurück in die Antike.¹

Abb. 1 zeigt das Erkennungszeichen der Pythagoreer, einem von Pythagoras im 6. Jht. v. Chr. gegründeten Geheimbund, der bis in das 5. Jht. hinein in Unteritalien wirkte, erst in Kroton, dann in Metapont.

Die Pythagoreer nannten dieses Zeichen *Pentagramm*, und als eine Figur, die in einem Zuge gezeichnet werden kann, hatte es für sie eine geheimnisvolle Bedeutung. Es wurde auch *Pentalpha* genannt, weil das große A (alpha) fünfmal erkennbar ist.

Die magische Bedeutung des Pentagramms hat sich bis in die Neuzeit erhalten, und so gilt es im deutschen Sprachraum unter der Bezeichnung *Drudenfuß* als Symbol zur Abwehr von bösen Geistern.

Goethe verwendet es bekanntlich im *Faust* beim Dialog zwischen Mephistopheles und Faust („Faust I, Studierzimmer“; vgl. auch Abb. 2):

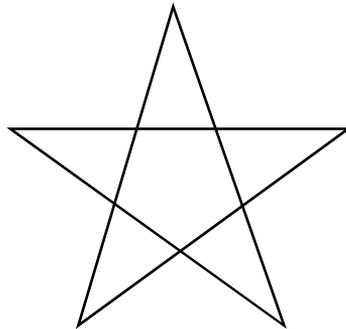


Abb. 1: Pentagramm bzw. Pentalpha

¹ Dieses mathematikhistorische Beispiel hat bereits vor fast zwanzig Jahren Eingang in die Mathematikdidaktik gefunden ([HISCHER 1981], [ARTMANN 1982], [HISCHER & SCHEID 1982]).

Mephisto: *Gesteh ichs nur! Daß ich hinausspaziere,
verbiestet mir ein kleines Hindernis:
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle —*

Faust: *Das Pentagramma macht dir Pein?
Ei, sage mir, du Sohn der Hölle,
Wenn das dich bannt, wie kamst du dann herein?
Wie ward ein solcher Geist betrogen?*

Mephisto: *Beschaut es recht! Es ist nicht gut gezogen;
Der eine Winkel, der nach außen zu,
Ist, wie du siehst, ein wenig offen.*

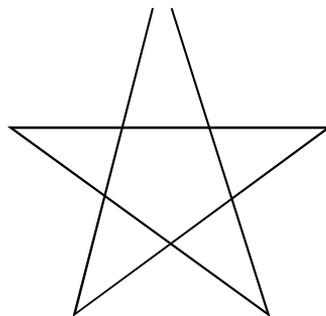


Abb. 2:
„offener“ Drudenfuß
des Mephistopheles

Doch zurück zu den Pythagoreern:

Verbindet man die Sternspitzen des Pentagramms in Abb. 1, so entsteht ein regelmäßiges Fünfeck, das sie *Pentagon* nannten (Abb. 3).

Dessen Diagonalen bilden die Ausgangsfigur, also das Pentagramm, und im Inneren entsteht – als Schnittfigur – ein neues, kleineres Fünfeck.

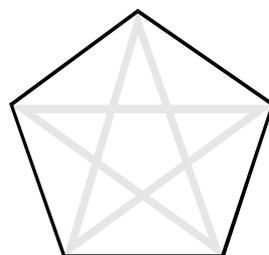


Abb. 3: Pentagon

1.2 Die Entdeckung der Irrationalität durch Hippasos von Metapont

im Jahre 1945 publizierte KURT VON FRITZ ² die Auffassung, ein gewisser HIPPOSOS VON METAPONT (ca. 450 v. Chr.) habe entdeckt, daß Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks inkommensurabel sind, d. h.

$$\frac{d}{s} \neq \frac{m}{n}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}^*$ (Abb. 4).

Würde eine solche Gleichheit möglich sein, so gäbe es eine Strecke e mit

$$s = me \quad \text{und} \quad d = ne,$$

und e hieße *gemeinsames Maß* von s und d .

Hierzu muß man zweierlei über das *Weltbild der Pythagoreer* wissen:

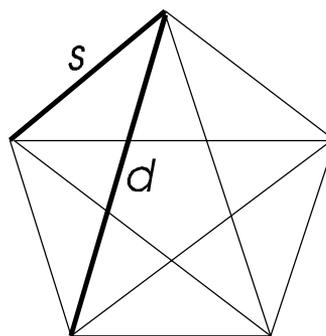


Abb. 4: Seite und
Diagonale des Pentagons

² [V. FRITZ 1945]; v. Fritz war Althilologe (gemäß einem Hinweis von B. Artmann).

- (1) „Zahlen“ sind nur natürliche Zahlen, die größer als Eins sind, also die Menge $\{2, 3, 4, \dots\}$.
- (2) »*Alles ist Zahl*«, d. h. „alles“ ist als Verhältnis von „Zahlen“ im Sinne von (1) darstellbar.

Somit müssen wir aus heutiger Sicht sagen, daß für die Pythagoreer zwei beliebige gleichartige „Größen“ (im heutigen Verständnis) stets *kommensurabel* waren, also stets ein gemeinsames Maß besaßen.

Natürlich verwendeten sie den Begriff „kommensurabel“ nicht, weil für sie „Inkommensurabilität“ nicht denkbar war – denn ein Begriff ist nur dann sinnvoll, wenn er abgrenzend, also im wörtlichen Sinne „definierend“ ist, andernfalls wäre er inhaltsleer.

Dadurch, daß HIPPASOS nun am Pentagramm die Existenz der Inkommensurabilität entdeckt hatte, brach eine der philosophischen Grundlagen der Pythagoreer zusammen (nämlich: »*Alles ist Zahl*«). Die Legende berichtet, daß HIPPASOS von den Göttern zur Strafe für diese frevelhafte Entdeckung mit dem Tod durch Schiffuntergang bestraft worden sei.

In unserer heutigen Sichtweise müssen wir also festhalten, daß die Pythagoreer mit Hilfe ihrer „Größenverhältnisse“ das beschrieben haben, wozu wir heute den *angeordneten Halbkörper der positiven rationalen Zahlen* verwenden, während infolge der Entdeckung von HIPPASOS ein Vorstoß zur Irrationalität und damit indirekt zum *angeordneten Halbkörper der positiven reellen Zahlen* erreicht wurde. Die Überwindung des von HIPPASOS verursachten Grundlagenschocks gelang EUDOXOS im 4. Jht. v. Chr. mit seiner *Proportionslehre*, wie sie im 5. Buch der „Elemente“ von EUKLID dargestellt ist.

Die spannende Frage für uns ist nun, wie es HIPPASOS gelang, festzustellen, daß Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck kein gemeinsames Maß besitzen!

Er benutzte hierfür einen *Algorithmus*, und zwar die sog. *Wechselwegnahme*, die schon ca. 500 Jahre vor ihm den Handwerkern bekannt war, welche damit Maßbestimmungen durchführten. Heute können wir diesen Algorithmus am besten mit einem Struktogramm veranschaulichen bzw. definieren (Abb. 5). Er liefert nicht nur ein gemeinsames Maß, sondern sogar das *größte gemeinsame Maß* der beiden gleichartigen Größen, das wir mit $ggM(a; b)$ bezeichnen können. Offensichtlich ist dann

$$ggM(a-b; b) = ggM(a; b), \text{ falls } a > b.$$

Bei Anwendung auf natürliche Zahlen heißt dieses Verfahren *Euklidischer Algorithmus*, welcher dann bekanntlich der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers dient.

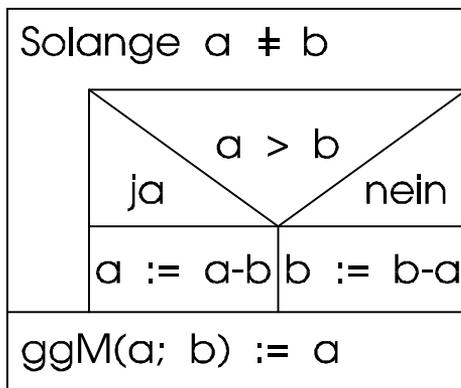


Abb. 5:
Wechselwegnahme zur Ermittlung des größten gemeinsamen Maßes zweier Größen a und b

Aus heutiger Sicht ist klar, daß die Wechselwegnahme genau dann nach endlich vielen Schritten abbricht, der Algorithmus also „anhält“, wenn das Größenverhältnis rational ist.

HIPPASOS wendete nun die Wechselwegnahme auf das Pentagon an und entdeckte, daß das Verfahren hier nicht abbricht, was wir wie folgt erkennen:

Unter der Voraussetzung, daß Diagonale und Seite eines Pentagons ein gemeinsames (also auch ein größtes) Maß besitzen, gilt gemäß Abb. 6 wegen

$$d_2 = d_1 - s_1 \text{ und } s_2 = s_1 - d_2$$

erkennbar:

$$\text{ggM}(d_1; s_1) = \text{ggM}(d_2; s_2)$$

Da dieses offensichtlich iterativ ad infinitum fortsetzbar ist, kann das Verfahren nicht abbrechen, und ein gemeinsames Maß ist nicht ermittelbar, was zu der Erkenntnis führt:

Diagonale und Seite eines regulären Fünfecks sind inkommensurabel.

Bemerkenswert an diesem Existenzbeweis ist, daß – im Gegensatz zu den sonst üblichen Beweisen – nicht algebraisch argumentiert wird, sondern daß lediglich ein „*nichtabbrechender Algorithmus*“³ angegeben wird.

Doch welche irrationale Zahl ist denn hier eigentlich entdeckt worden?

Wir ordnen dem Ausgangsfünfeck mit der Seite s und der Diagonalen d in anderer Weise gemäß Abb. 7 ein kleineres Fünfeck zu, das offenbar die Seite $d - s$ und die Diagonale s hat. Aufgrund der Ähnlichkeit dieser regulären Fünfecke gilt

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d - s},$$

also mit $x := \frac{d}{s}$ dann $x = \frac{1}{x - 1}$ oder $x^2 - x - 1 = 0$,

was auf

$$\frac{d}{s} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

führt.

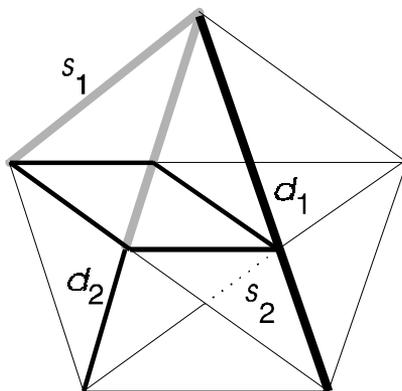


Abb. 6:
Nichtabbrechen der Wechselwegnahme beim Pentagon: $\text{ggM}(d_1; s_1) = \text{ggM}(d_2; s_2)$

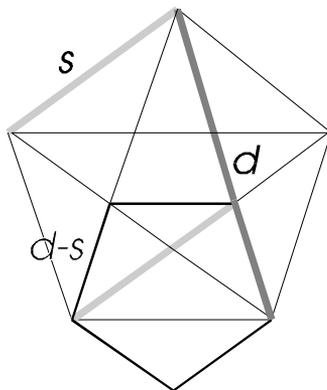


Abb. 7: Zuordnung eines kleineren Pentagons zum Ausgangspentagon

³ Es hat also Vorteile, auch solche nichtabbrechenden bzw. „nicht anhaltenden“ Verfahren als „Algorithmen“ zu bezeichnen. Die Wechselwegnahme ist dann in diesem Sinne stets ein Algorithmus!

Wegen der Inkommensurabilität von d und s ist diese Zahl schließlich *irrational!*

Üblicherweise weist man die Existenz irrationaler Zahlen am Beispiel von $\sqrt{2}$ nach, also an der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale eines Quadrats. Hierfür gibt es folgende bekannte Beweistypen:

- Indirekter Beweis, der von Darstellbarkeit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit ganzzahligen, teilerfremden $p, q \in \mathbb{N}^*$ gausgeht und zu einem Widerspruch führt.
- Der konstruktive Beweis mittels Wechselwegnahme an einem Quadrat, der dem am Fünfeck entspricht, jedoch nicht so ins Auge fällt wie dieser (Abb. 8).

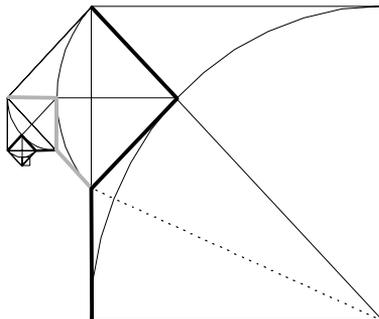


Abb. 8: Irrationalität von $\sqrt{2}$ — Wechselwegnahme am Quadrat

Vergleicht man jedoch das hohe Abstraktionsniveau dieser Irrationalitätsbeweise mit der Wechselwegnahme am Pentagon, so wird mit v. FRITZ plausibel, daß die Irrationalität wohl am regulären Fünfeck und nicht am Quadrat entdeckt worden ist, daß also HIPPOSOS als *Entdecker der Irrationalität* gelten kann.⁴

Die Zahl $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ hat weitere interessante Eigenschaften, z. B.:

1. Mit $x := \frac{d}{s} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ war ja $x^2 - x - 1 = 0$, also $x^2 = x + 1$ oder:

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \dots$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

⁴ Einwandfrei bewiesen ist das jedoch bisher nicht (gemäß einer Mitteilung von B. Artmann).

Diese am Pentagramm als Längenverhältnis „einfach“ begründete Zahl $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ hat also zugleich eine Darstellung, die sich als „einfachster“ regulärer, unendlicher Kettenbruch erweist!

2. Aus $x = 1 + \frac{1}{x}$ ergibt sich ein Approximationsalgorithmus für $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, der in Abb. 9 in schülergerechter Taschenrechner-Notation dargestellt ist.

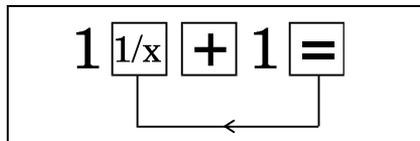


Abb. 9: Taschenrechner-Algorithmus zur Approximation von $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$

3. *Goldener Schnitt*: Die aus dem Pentagramm abgelesene Gleichung $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$ läßt sich als Streckenteilung interpretieren, die in der perikleischen Baukunst bedeutsam war (Abb. 10).

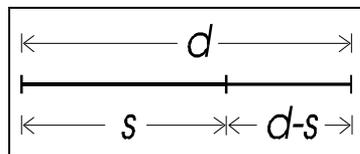


Abb. 10: Goldener Schnitt

4. Für die Fibonacci-Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 := a_1 := 1$ und $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$ gilt:

$$\lim \left\langle \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

1.3 Ein Weg zur Entdeckung der Irrationalität über das Pentagramm im Mathematikunterricht der Klasse 9

Diese historisch geprägten Vorbetrachtungen haben nun Konsequenzen für die Planung und Durchführung von Unterricht. Wenn es z. B. um die Erarbeitung des Begriffs der „reellen Zahlen“ geht, so kommt es offenbar auf die *Abgrenzung* der rationalen gegenüber den irrationalen Zahlen an, was man schon immer gern in Klasse 9 durch Unterscheidung von Kommensurabilität und Inkommensurabilität getan hat.

Folgt man hierbei der *mutmaßlichen historischen Entwicklung*, so bietet sich folgender, von mir mehrfach erprobter, *Unterrichtsgang* an:

- Kennenlernen der Wechselwegnahme und handelnde Anwendung: ggM, ggT.
- Festigung der pythagoreischen Evidenz: Das ggM zu zwei gegebenen gleichartigen Größen existiert immer und ist mit der Wechselwegnahme bestimmbar.

• Begegnung mit dem Pentagon und dem Pentagramm:

- Entdeckung des Pentagons durch Verknoten eines Papierstreifens (Abb. 11).
- Konstruktion eines Pentagons mit Geodreieck (Berechnung des Innenwinkels) und Zirkel.

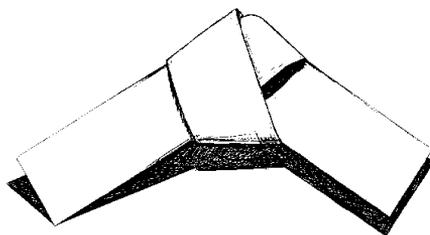


Abb. 11: „Konstruktion“ eines Pentagons durch Verknoten eines Papierstreifens⁵

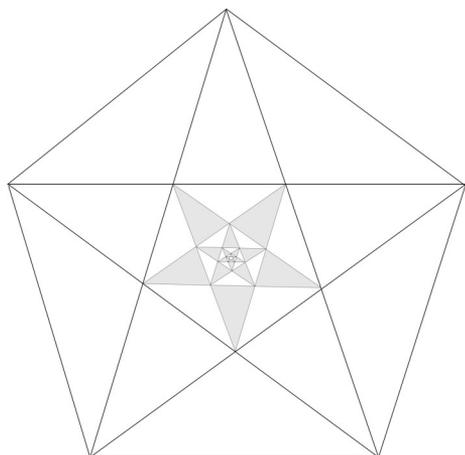


Abb. 12: „Folge der Fünfecke“ – 1. Version

- Einzeichnen der Diagonalen und Erkennen des Pentagramms.
- Hinweis auf die magische Bedeutung (Pythagoreer, Drudenfuß, Faust, ...).
- Entdeckung des inneren Pentagons (vgl. Abb. 3).
- Entdeckung der Iteration und der unendlichen Figurenfolge („Folge der Fünfecke“, Abb.

- Experimentieren mit der Wechselwegnahme am Pentagon, evtl. schon Formulierung einer Vermutung.
- Darstellungswechsel:
- Einmalige Wechselwegnahme liefert bereits $s' = d - s$ und $d' = s$ (vgl. Abb. 7, aus der Abb. 13 entwickelt wird).
- Erkennen, daß bei unendlicher Figurenfolge die Wechselwegnahme (auch hier!) nicht abbricht (neue unendliche „Figurenfolge“, vgl. Abb. 13).
- *Interpretation:* d und s können kein gemeinsames Maß besitzen.
- *Umdeutung:* Es gibt keine natürlichen Zahlen m und n mit $\frac{d}{s} = \frac{m}{n}$.

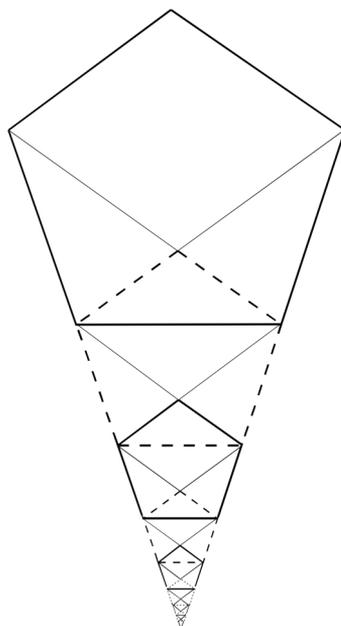


Abb. 13: „Folge der Fünfecke“ – 2. Version

⁵ Vgl. den Vorschlag in [Artmann 1992].

- *Folgerung*: Es muß ein „Faktor“ k existieren mit $d = k \cdot s$, jedoch ist $k \notin \mathbb{Q}$,
- also: *Die rationalen Zahlen reichen zur Beschreibung der Welt nicht aus!*

In diesem Sinne ergibt sich in Folge der *Entdeckung der Inkommensurabilität* die *Existenz irrationaler Zahlen*. Dabei ist es eine philosophische Frage, ob diese irrationalen Zahlen bereits a priori vorhanden sind und (ebenfalls) von uns nur noch „entdeckt“ werden, oder ob sie gemäß einer Auffassung von Mathematik nach Wittenberg als einer „Wirklichkeit sui generis“ in Folge einer wie auch immer gearteten Entdeckung der Inkommensurabilität von uns erfunden werden, um auf diese Weise – wie üblich – eine konstatierte Unvollständigkeit des mathematischen Gebäudes hinwegzudefinieren.

Dadurch, daß nun historisch gesehen die Irrationalität über die Inkommensurabilität „entdeckt“ worden ist, spricht im Sinne Freudenthals vieles für die didaktische Grundhaltung, daß es im Rahmen von Begriffsbildung im Mathematikunterricht keine „Einführung“ von reellen bzw. irrationalen Zahlen gibt, vielmehr sind diese *schon vorhanden* (sie sind ja „reell“). Sie werden also – bei historisch-genetischem Unterrichtsaufbau – nur *entdeckt!*⁶

- Dieser historisch orientierte Aufbau „entdeckenden Lernens“ kann *im Sinne eines Spiralcurriculums* genutzt werden:
 - Wechselwegnahme mit Cuisenaire-Stäben (im Prinzip schon in der Grundschule, sonst auch als Einstieg spätestens in Klasse 9).
 - Wechselwegnahme als Algorithmus zur ggM- und ggT-Bestimmung (Kl. 6, spätestens Kl. 9).
 - Experimentieren mit dem Pentagon und Pentagramm, Entdeckung unendlicher Figurenfolgen, Entdeckung der Irrationalität (Kl. 9).
 - Propädeutische Einführung von *Folge* und *Grenzwert* (Kl. 9).
 - Vertiefende Behandlung von *Irrationalität*, *Folge* und *Konvergenz* anhand des Pentagramms (Oberstufe).

2 Didaktische Einordnung

2.1 Die „methodischen Variablen“ nach VOLLRATH

Nach der Vorstellung dieses ersten Beispiels möchte ich nun eine Einordnung in didaktische Kategorien vornehmen. Ich beziehe mich hierbei auf die von VOLLRATH eingeführten „methodischen Variablen“⁷, die der Beschreibung und Planung von Unterricht dienen sollen (Abb. 14). Und zwar unterscheidet er *zwei Klassen methodischer Variablen*, nämlich

- *Unterrichtsphasen* und
- *methodische Entscheidungen*.

⁶ vgl. [FREUDENTHAL 1973, Bd. 1, S. 195]

⁷ [VOLLRATH 1976]

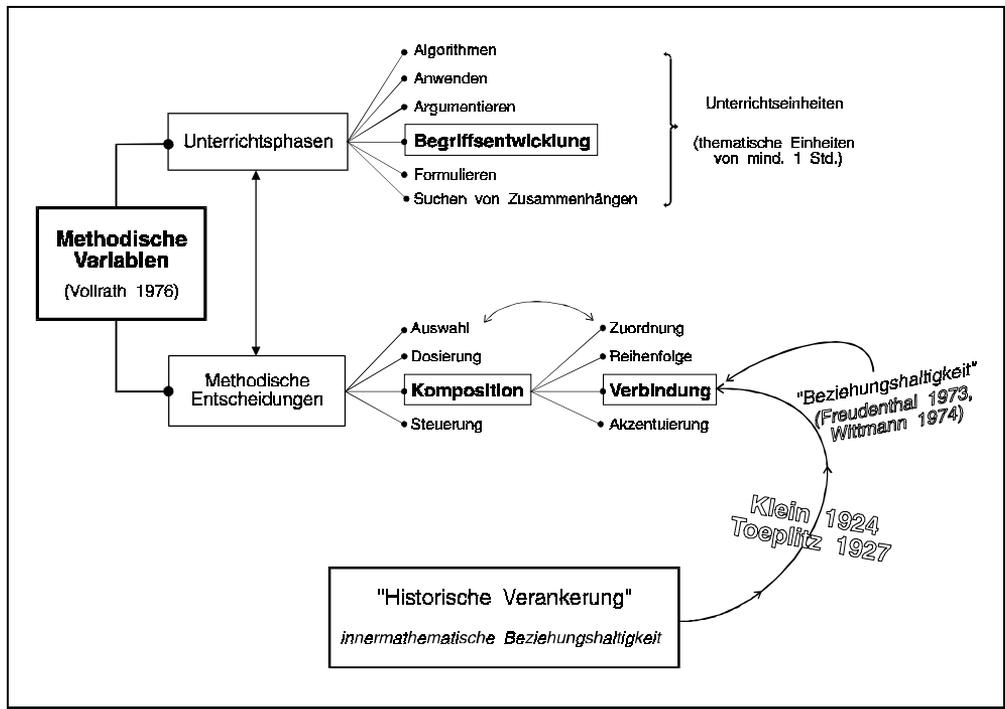


Abb. 14: Methodische Variablen nach VOLLRATH und „Historische Verankerung“⁸

Beide Klassen sind miteinander verknüpft, denn methodische Entscheidungen beziehen sich auf die Gestaltung der Unterrichtsphasen. Als Unterrichtsphasen nennt VOLLRATH u. a. *Algorithmen, Anwenden, Argumentieren, Begriffsentwicklung, Formulieren* und *Suchen von Zusammenhängen*. Als methodische Entscheidungen führt er Probleme der *Auswahl, der Dosierung, der Komposition* und der *Steuerung* auf.

Für das Thema dieser Abhandlung wird sich die Variable „Komposition“ als bedeutsam erweisen, und zwar im Zusammenhang mit „Begriffsbildung“. VOLLRATH gliedert diese Variable in die Teilvariablen *Zuordnung, Reihenfolge, Verbindung* und *Akzentuierung* auf. Mit *Verbindung* meint er insbesondere Verbindungen des jeweiligen mathematischen Inhalts mit anderen, auch außermathematischen Themenkreisen, also etwa das, was ERICH WITTMANN mit Bezug auf HANS FREUDENTHAL „Beziehungshaltigkeit“ genannt hat.⁹ Auch der sog. „Anwendungsorientierte Unterricht“ würde eine Belegung dieser Variablen sein.

Nun ist *Beziehungshaltigkeit* im wörtlichen Sinn das Gegenteil von Beziehungslosigkeit. *Verbindung* im Sinne von Beziehungshaltigkeit hat damit zur Folge, daß der behandelte

⁸ [HISCHER 1981]

⁹ [WITTMANN 1974, S. 143]

Themenkreis für den Lernenden vielseitig und ganzheitlich erscheint, er wird damit leichter behalten „*als ein Aggregat von beziehungslosen Teilen*“ (wie es der Lernpsychologe STRUNZ 1968 nannte).

Deshalb plädiert WITTMANN auch für die

Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik.¹⁰

Dieses ist für ihn eines der Kennzeichen der sog. *genetischen Methode*.¹¹

2.2 „Historische Verankerung“ als innermathematische Beziehungshaltigkeit

Der Begriff *genetische Methode* geht ja ursprünglich auf Felix KLEIN zurück, der sich – immerhin als bedeutender Mathematiker! – zugleich in ganz besonderer Weise mit der Entwicklung des Mathematikunterrichts und der Lehrerbildung befaßt hat.

TOEPLITZ entwickelte 1927 die Vorstellungen von KLEIN weiter, indem er schrieb:¹²

(...) alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden, der Mittelwertsatz, die Taylorsche Reihe, der Konvergenzbegriff, das bestimmte Integral, vor allem der Differentialquotient selbst, und bei denen nirgends die Frage berührt wird: warum so? wie kommt man zu ihnen?, alle diese

Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden.

Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.

Da in der Pädagogischen Psychologie heute der Begriff „genetische Methode“ anders als damals gebraucht wird, möchte ich statt dessen in Würdigung der Ideen von KLEIN und TOEPLITZ die Bezeichnung

historische Verankerung

wählen, die ich im selben Zusammenhang bereits 1981 vorgeschlagen habe.¹³

¹⁰ [WITTMANN 1974, S. 125]

¹¹ a. a. O.

¹² [TOEPLITZ 1927, S. 92], zitiert auch bei [WITTMANN 1974, 19785, S. 127]

¹³ [HISCHER 1981]

Damit wird zugleich an den lernpsychologischen Begriff „Verankerung“ im Sinne von Ausubel angeknüpft. Und zwar plädiere ich für die Verwendung historischer Beispiele im Unterricht, die sich als tragfähige Bausteine einer Unterrichtseinheit erweisen. Dabei sollten sie gemäß Toeplitz vom „Staub der Zeit“ befreit und in heutiger Formulierung dargestellt werden.

Durch diese Belegung der methodischen Variablen „Verbindung“ läßt sich eine *innermathematische Beziehungshaltigkeit* erreichen (vgl. Abb. 14), und „*Geschichte der Mathematik*“ erscheint in diesem Sinne als *didaktischer Aspekt* – zugleich wird ein *Beitrag zur Kulturgeschichte* geliefert.

Als ein erstes Beispiel für diese historische Verankerung können die *Wechselwegnahme* und das *Pentagramm* dienen, die gemeinsam den Aufbau einer entsprechenden Unterrichtseinheit von ca. 3 Wochen Dauer in Kl. 9 gestatten. Darüber hinaus können sowohl die Wechselwegnahme als auch das Pentagramm Anlaß propädeutischer, handlungsorientierter Aktivitäten in früheren Klassenstufen sein. Das von ARTMANN herausgegebene MU-Themenheft liefert hierzu bekanntlich ein Fülle von Anregungen.¹⁴

Mit dem nächsten Beispiel zeige ich eine Möglichkeit zur Berücksichtigung der „historischen Verankerung“ im Analysisunterricht der gymnasialen Oberstufe auf.

3 Die Quadratrix – die Trisectrix

3.1 Zusammenhang zwischen Quadratrix und Trisectrix

Eine besondere Bedeutung haben in der Mathematik seit der Antike „Kurven“, heute insbesondere in Analysis und Topologie, aber auch in der Darstellenden Geometrie. In der Antike waren zwei grundsätzlich unterschiedliche Methoden zur Beschreibung konkreter Kurven bekannt:

- ☞ Kurven als *Schnitt zweier Flächen* (wie wir es etwa von Zylinder- oder Kegelschnitten her kennen); damals hatte man z. B. auf diese Weise die sog. *Hippopede* („Pferdefessel“) beschrieben, die entsteht, wenn man einen Zylinder mit einer Kugel schneidet, so daß der Zylinder die Kugel in einem Pol tangiert.
- ☞ Kurven als Spur zweier kombinierter Bewegungen („*kinematische Definition*“).

Die *erste Kurve* jenseits von Kreis und Gerade verdanken wir gemäß einem Bericht von PROKLOS (410 – 485) dem Sophisten HIPPIAS aus Elis (geb. 460 v. Chr.). Seitdem ist diese Kurve sowohl unter dem Namen „*Trisectrix des Hippias*“ als auch als „*Quadratrix des Hippias*“ bekannt. HIPPIAS verwendet zur Beschreibung dieser Kurve eine *kinematische*

¹⁴ [ARTMANN 1982]

Definition, wie es später auch ARCHIMEDES macht, und zwar kennzeichnet jener die nach ihm benannte Spirale sinngemäß wie folgt: ¹⁵

- **Archimedische Spirale:**

Auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Zentralstrahl bewege sich mit konstanter Radialgeschwindigkeit ein Punkt vom Zentrum nach außen (Abb. 15).

Hieraus folgt bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= at \\ \varphi &= bt \end{aligned} \right\} \rho = k\varphi$$

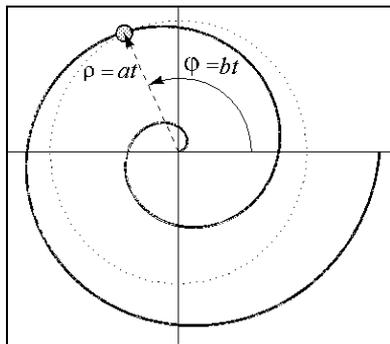


Abb. 15: Archimedische Spirale

Etwas komplizierter ist dagegen schon die (historisch ältere) kinematische Beschreibung der

- **Trisectrix** (vgl. Abb. 16):

Im Quadrat $ABCD$ werde die Strecke DC parallel zu sich mit konstanter Geschwindigkeit bis in die Lage AB verschoben, und AD rotiere um A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ebenfalls bis in die Lage AB . Beide Bewegungen starten gleichzeitig und hören gleichzeitig auf.

Der geometrische Ort der Schnittpunkte ist die zu definierende Trisectrix.

Anstelle der verbalen Definition kann man auch eine handlungsorientierte geben, indem man sich einen *Trisectrix-Zirkel* vorstellt, den man ggf. auch bauen kann (Abb. 17) – bei gut ausgebildetem Anschauungsvermögen genügt jedoch bereits die „Idee des Trisectrix-Zirkels“!

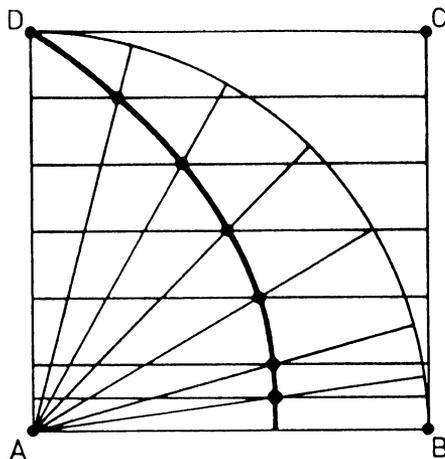


Abb. 16: Kinematische Definition der Trisectrix

Ist die Trisectrix gegeben, etwa wie eine Normalparabel als Schablone, so läßt sich dann damit eines der sog. der drei *berühmten klassischen Probleme*, nämlich die *Winkeldreiteilung*, lösen (Abb. 18), womit die Namensgebung für diese Kurve begründet wird.

Die Winkeldreiteilung ist aber auch mit der Archimedischen Spirale möglich (Abb. 15), und tatsächlich wurde sie in der Antike dazu benutzt. Natürlich sind dann mittels der Trisectrix

¹⁵ [BOYER 1968, S. 140]

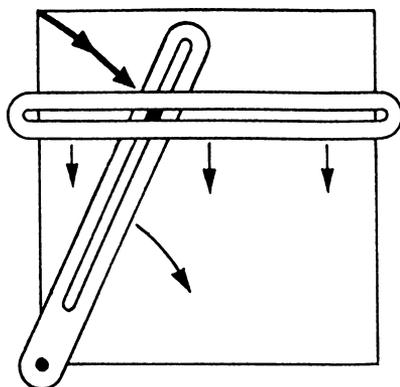


Abb. 17: Trisectrix- bzw. Quadratrix-Zirkel

und der Archimedischen Spirale unter Anwendung des Strahlensatzes beliebige Winkelteilungen in n gleich große Teilwinkel möglich!

In diesem Sinn hat also HIPPIAS eines der drei berühmten klassischen Probleme gelöst (diese waren: *Quadratur des Kreises*, *Winkeldreiteilung* und *Würfelverdoppelung*, das sog. „Delische Problem“, benannt nach dem Orakel von Delos), jedoch mußte die *Trisectrix als weiteres geometrisches Hilfsmittel* hinzugenommen werden!

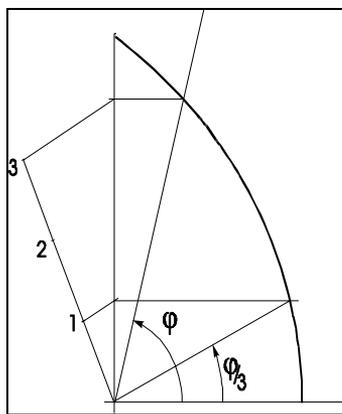


Abb. 18: Winkeldreiteilung mit Hilfe der Trisectrix

Kreises, *Winkeldreiteilung* und *Würfelverdoppelung*, das sog. „Delische Problem“, benannt nach dem Orakel von Delos), jedoch mußte die *Trisectrix als weiteres geometrisches Hilfsmittel* hinzugenommen werden!

DINOSTRATOS (350 v. Chr.) verwendet die Trisectrix auch zur *Quadratur des Kreises*, weshalb sie auch „*Quadratrix*“ heißt. Dieses klassische Problem ist übrigens ebenfalls mit Hilfe der Archimedischen Spirale lösbar – ganz entsprechend also wie das Problem der Winkeldreiteilung (s. o.).¹⁶

Dazu zunächst (vgl. Abb. 19) der

• **Satz von DINOSTRATOS:**

In der Quadratrix des Hippias gilt

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad r_0 = \frac{2r}{\pi}.$$

Zum Beweis:

DINOSTRATOS kennzeichnet die Quadratseite r als *mittlere Proportionale* zwischen dem Kreisbogen \widehat{b} und der Strecke r_0 wie folgt:

$$\frac{\widehat{b}}{r} = \frac{r}{r_0} \quad (*)$$

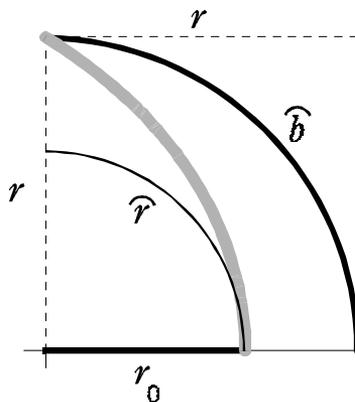


Abb. 19: Zum Satz von DINOSTRATOS

¹⁶ vgl. [Boyer 1968]

Wegen $\widehat{b} = \frac{\pi}{2}r$ folgt dann daraus die Behauptung.

(Die Gleichung (*) erinnert an den Goldenen Schnitt, den wir schon beim Pentagramm mit $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$ kennengelernt haben.)

Zum Beweis von (*) verwendet DINOSTRATOS einen für die damalige Zeit typischen *apagogischen Beweis*, indem er unter der Benutzung der *Trichotomie* zeigt, daß

$$\text{weder } \frac{\widehat{b}}{r} < \frac{r}{r_0} \text{ noch } \frac{\widehat{b}}{r} > \frac{r}{r_0}$$

möglich ist. (Der Viertelkreis mit dem Radius r_0 hat also die Länge r .)

Der Beweis kann unter Verwendung elementargeometrischer Eigenschaften und der kinematischen Definition der Trisectrix geführt werden, und er kann auf Schulniveau entwickelt werden.¹⁷

• **Quadratur des Kreises mit der Quadratrix durch DINOSTRATOS**

DINOSTRATOS argumentiert nun anhand der Verhältnisgleichung (*) wie folgt weiter:

\widehat{b} stellt eine Länge dar, und zwar die Länge des Viertelkreisbogens.

Also müßte man für \widehat{b} die Länge s einer gleichlangen Strecke einsetzen können, die aber noch zu konstruieren wäre:

$$\frac{s}{r} = \frac{r}{r_0} \text{ mit } s = \widehat{b}$$

Das läßt sich mit Hilfe des Strahlensatzes¹⁸ lösen (Abb. 20):

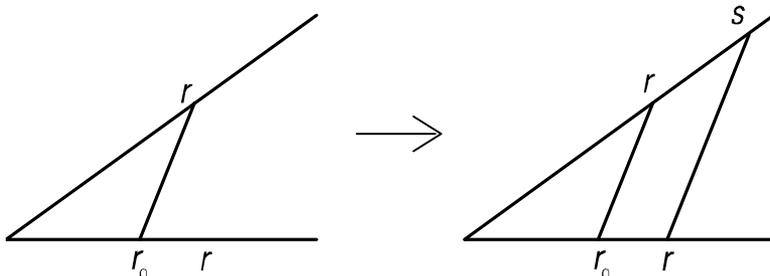


Abb. 20: Konstruktion der Viertelkreislänge s mit Hilfe des Strahlensatzes zur Quadratur des Kreises

¹⁷ Ich werde an späterer Stelle darauf zurückkommen; vgl. auch [HISCHER & SCHEID 1982, 1995].

¹⁸ Ich erkenne keinen Bildungswert darin, wenn Wert auf die Feststellung gelegt wird, daß es sich hierbei um den ersten Strahlensatz handelt, zumal „beide Strahlensätze“ gleichwertig sind! Noch problematischer wird es dann, wenn man Schülerinnen und Schülern als bewertbare Lernleistung abverlangt entscheiden zu können, welches der erste und welches der zweite Strahlensatz ist!

Folgerung:

Ist ein Kreis mit dem Radius r gegeben, so liefert die Trisectrix die Länge r_0 , und mit Hilfe des Strahlensatzes ist s konstruierbar, so daß gilt (vgl. Abb. 21):

$$A = \pi r^2 = (\pi r)r = (2\widehat{b})r = (2s)r$$

Die Trisectrix erlaubt also die Umwandlung eines Kreises in ein Rechteck mit demselben Flächeninhalt, das dann – z. B. mit dem Höhensatz des Euklid – in ein gleich großes Quadrat verwandelt werden kann. Dieses ist die *Quadratur des Kreises*, wodurch die Namensgebung „Quadratrix“ für die Trisectrix begründet wird.

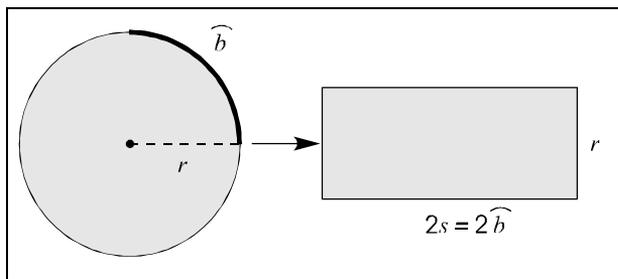


Abb. 21: Quadratur des Kreises nach DINOSTRATOS

Mit Hilfe der Trisectrix bzw. der Quadratrix konnten also sogar *zwei* der „drei berühmten klassischen Probleme“ gelöst werden (wie bereits erwähnt: *Winkeldreiteilung*, *Quadratur des Kreises* und die *Würfelverdoppelung*).

Wir wissen heute, daß alle drei Probleme geometrisch nicht lösbar sind, wenn als Hilfsmittel nur Zirkel und Lineal zugelassen sind. Die zusätzliche Verwendung der Trisectrix des HIPPIAS ermöglicht jedoch eine geometrische Lösung der ersten beiden klassischen Probleme – ebenso kann die Archimedische Spirale zur Lösung dieser Probleme verwendet werden¹⁹, wobei diese Kurven damit die Rolle von „Werkzeugen“ zur Lösung von Problemen erhalten.

3.2 Ein Vorschlag zur Behandlung von Trisectrix und Quadratrix in der Oberstufe

Ich skizziere nun eine mögliche problemorientierte Unterrichtseinheit in der Oberstufe, die unter Berücksichtigung der „historischen Verankerung“ am Beispiel von Trisectrix und Quadratrix konzipiert ist.

1. Streckenteilung

Als wiederholender, vertiefender Einstieg wird erarbeitet, daß der Strahlensatz hier stets weiterhilft.

2. Winkelteilung

Die Aufteilung in 2, 4, 8, ... gleich große Teilwinkel klappt, ansonsten entsteht große Ratlosigkeit. Tröstlicher Hinweis für die Schüler: Dieses war bereits im Altertum eines der drei berühmten ungelösten Probleme!

¹⁹ vgl. [BOYER 1968, S. 140-141]

Eine noch schönere Problemorientierung ergibt sich bei Vertauschung der Reihenfolge der ersten beiden Schritte: Bei der Konstruktion des Pentagramms ergab sich ja die Notwendigkeit der Ermittlung von $\frac{6\pi}{5}$, also von $\pi + \frac{\pi}{5}$. Somit könnte man mit dem Problem

der Winkelteilung einsteigen, hier „auflaufen“ und dann zur Streckenteilung als leicht lösbarer Problem abschwenken.

Oder man beginnt mit der Frage nach der Skalierbarkeit von Lineal und Winkelmesser, die im Falle des Lineals mittels Strahlensatz schnell zu beantworten ist.

3. **Kinematische Kurven**

Erzeugung verschiedener kinematischer Kurven (Spiralen, Trisectrix, weitere Erfindungen) – Zeichnung von Hand und auch durch Computersimulation.

4. **Trisectrix und Winkeldreiteilung**

Feststellung, daß mit der Trisectrix das Problem lösbar wird. Aufgabe: Anfertigung einer *Trisectrix-Schablone* durch die Schüler (in Analogie zur ihnen bereits bekannten Parabel-Schablone).

5. **Probleme der Trisectrix**

Sowohl bei Zeichnung von Hand als auch bei der Computersimulation (Abb. 22) gibt es Probleme kurz vor und bei der Endstellung:

Der Schnittpunkt ist nicht präzise bzw. gar nicht definiert (fast parallele Geraden!). Ein „Trisectrix-Zirkel“ (Abb. 17) offenbart eine große *Schwankungs- Ungenauigkeit!*

6. **Analyse der „Schwankungs- ungenauigkeit“ der Trisectrix**

Der Polarwinkel der Punkte auf der Trisectrix sei mit φ bezeichnet.

Für $\varphi \neq 0^\circ$ und $\varphi \approx 0^\circ$ ist der Schnittpunkt mit der Horizontalen zwar *idealgeometrisch* präzise bestimmt, *realgeometrisch* jedoch nicht. Für $\varphi = 0^\circ$ existiert kein Schnittpunkt. Dreht man die Zeichnung um 90° und führt die Bewegung weiter, so entsteht folgende zweiseitige Trisectrix, die in der Mitte eine *Lücke* aufweist (Abb. 23).

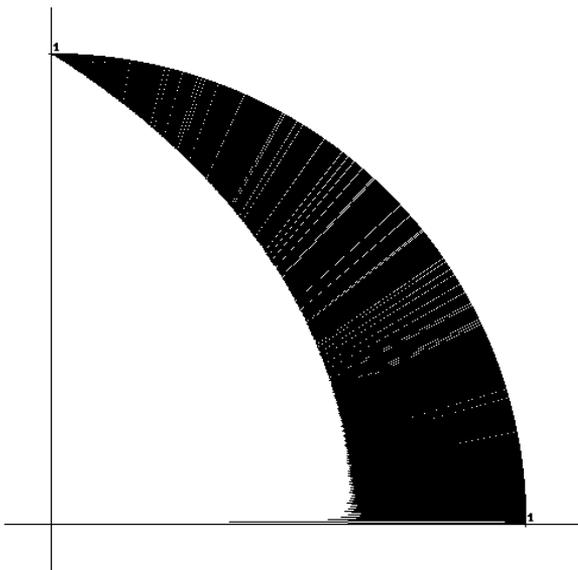


Abb. 22: Computer-Simulation der Trisectrix²⁰ – Schwankungsungenauigkeit!

²⁰ Dynamisch erstellt mit dem Funktionenplotter HL-PLOT8 von Eberhard LEHMANN, Berlin.

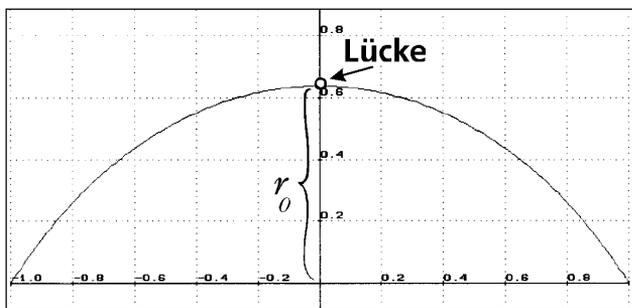


Abb. 23: „Lücke“ bei der zweiseitig kinematisch dargestellten Trisectrix

7. „Lücke stopfen“²¹

Da die Trisectrix in unmittelbarer Nähe der Lücke eindeutig definiert ist, liegt es nahe, die Lücke durch „Durchzeichnen“ zu stopfen, was einer stetigen Fortsetzung entspricht („schnelle Bewegung“ des Trisectrix-Zirkels über die „Lücke“ hinaus!?). Funktionsgrenzwert und Stetigkeit müssen hier jedoch noch nicht bekannt sein, vielmehr können diese Begriffe *problemorientiert* hierdurch vorbereitet werden.

8. Ermittlung des „Quadratrix-Halbmessers“ r_0

Aus der Zeichnung ergibt sich $\frac{r_0}{r} \approx 0,64$. Ist es nun Zufall, daß für den Kehrwert

$$\frac{r}{r_0} \approx 1,57 \approx \frac{\pi}{2} \text{ gilt?}$$

Genauere Zeichnungen bestätigen die *Vermutung*: $\frac{r}{r_0} = \frac{\pi}{2}$ bzw. $r_0 = \frac{2}{\pi} r$

9. Satz des DINOSTRATOS (s. o.)

Für den „apagogischen Beweis“ der Vermutung erweitern wir Abb. 19 wie in Abb. 24 dargestellt und betrachten dann gemäß Dinostratos folgende zwei Fälle, die jeweils einen Widerspruch ergeben werden:

Fall 1: $\frac{\widehat{b}}{r} < \frac{r}{r_0}$

Es gibt dann einen Punkt E auf der Strecke \overline{AB} mit $|AE| > |AG| = r_0$ und

$$\frac{\widehat{b}}{r} = \frac{r}{r_0}$$

Bezeichnen wir die Länge des Kreisbogens mit den Endpunkten E und F

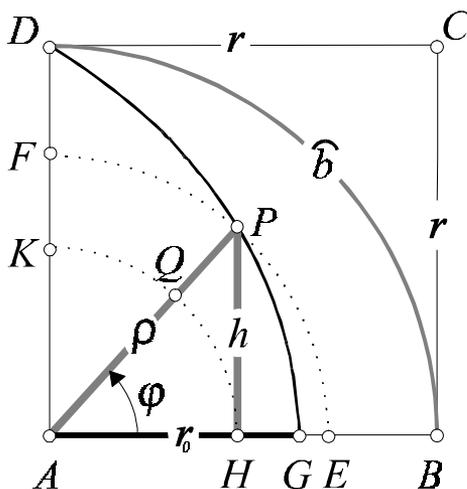


Abb. 24: Zum Satz von Dinostratos

²¹ Der Begriff geht auf Heinz GRIESEL zurück.

$\langle EF \rangle$, so ist zunächst $\frac{\langle EF \rangle}{|AE|} = \frac{\widehat{b}}{r} \quad \left(= \frac{\pi}{2} \right)$ und damit dann $\langle EF \rangle = r$.

Aufgrund der kinematischen Definition der Quadratrix gilt $\frac{\langle EF \rangle}{\langle EP \rangle} = \frac{r}{h}$, und wegen $\langle EF \rangle = r$ folgt daraus $\langle EP \rangle = h$. Dies ist aber wegen $P \neq G$ offensichtlich falsch!

Fall 2: $\frac{\widehat{b}}{r} > \frac{r}{r_0}$

Dann gibt es einen Punkt H auf der Strecke \overline{AB} mit $|AH| < |AG| = r_0$ und

$$\frac{\widehat{b}}{r} = \frac{r}{|AH|}.$$

Wir deuten nunmehr Abb. 24 so, daß der Punkt H auf der Quadratseite vorgegeben ist und senkrecht darüber dann der Punkt P auf der Quadratrix gewählt wird, so daß

$h = |HP|$ ist. Wir lesen wiederum eine Proportionalität ab, nämlich $\frac{\widehat{b}}{r} = \frac{\langle HK \rangle}{|AH|}$, und

daraus folgt zunächst $\langle HK \rangle = r$. Analog zum ersten Fall gilt weiterhin $\frac{\langle HK \rangle}{\langle HQ \rangle} = \frac{r}{h}$

(also ebenfalls wegen der kinematischen Definition der Quadratrix), und mit $|HK| = r$ folgt hieraus $\langle HQ \rangle = h$. Dieses ist aber für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ wegen $0 < \varphi < \tan(\varphi)$, $h = |AH| \cdot \tan(\varphi)$ und $\langle HQ \rangle = |AP| \cdot \varphi$ falsch (in der üblichen Argumentation mit Flächeninhaltsvergleich), so daß *auch der zweite Fall nicht möglich* ist.

Es bleibt somit aufgrund der Trichotomie nur der

Fall 3: $\frac{\widehat{b}}{r} = \frac{r}{r_0}$

übrig, was zu beweisen war.

10. Trisectrix als Quadratrix

Entdeckung der Möglichkeit zur *Quadratur des Kreises* mit Hilfe der Trisectrix: Die zugehörige Vorgehensweise wurde bereits ausführlich beschrieben.

11. Analytische Behandlung der Trisectrix

Stellt man die Trisectrix aus Abb. 16 wie in Abb. 24 mit Hilfe von Polarkoordinaten (ρ, φ) dar, so gilt mit einem kinematischen Parameter t ($0 \leq t \leq 1$), wenn wieder h die Höhe des jeweiligen Trisectrix-Punktes über der Quadratseite \overline{AB} bezeichnet:

$$h = r(1 - t), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}(1 - t)$$

Elimination von $(1 - t)$ liefert $h = \frac{2r}{\pi} \varphi$.²²

Mit $\sin(\varphi) = \frac{h}{\rho}$ folgt schließlich: $\rho = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin(\varphi)}$

Für „ $\varphi \rightarrow 0$ “ muß sich $\rho = r_0 = \frac{2r}{\pi}$ ergeben, also folgt: $\frac{\varphi}{\sin(\varphi)} \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0} 1$

Dieses ergibt sich also **vor der Einführung des Grenzwertbegriffs**, die üblicherweise bei den langweiligen rationalen Funktionen erfolgt.

Bemerkenswert ist, daß $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} = 1$ „nebenbei“ erzielt und nicht künstlich in

den Vordergrund gestellt wurde. Dabei konnte man teilweise zugleich auf historischen Pfaden wandeln.

12. Die Trisectrix in kartesischen Koordinaten

Wir drehen die Trisectrix wie in Abb. 23 um 90° in ein x - y -Koordinatensystem und erhalten:

$$x = \rho \cdot \sin(\varphi) = \frac{2r}{\pi} \varphi, \quad y = \rho \cdot \cos(\varphi) = x \cdot \cot(\varphi)$$

Daraus ergibt sich schließlich:

$$y = x \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2r} x\right) = x \cdot \cot\left(\frac{x}{r_0}\right)$$

Auch hier kann der Grenzwert für $x \rightarrow 0$ betrachtet werden. Ferner kann man die Trisectrix noch weiter verallgemeinern, indem man $|x| > r$ zuläßt und untersucht, ob auch die kinematische Definition entsprechend verallgemeinerbar ist (dies geht bis $|x| < 2r$ bzw. $|\varphi| < \pi$).

13. Johann Bernoulli

Dieser stellte 1691/92 die Aufgabe, *Tangenten an die Quadratrix* zu finden.²³

²² Eleganter und einfacher folgt dies aus der Proportionalität $h \sim \varphi$, die wiederum direkt aus der Definition der Trisectrix folgt, indem man die Randwerte einsetzt.

²³ [BERNOULLI 1691/92]

Mit fortgeschrittenen Kenntnissen der Schulanalysis ist das lösbar, und es folgt:

$$\text{Für } x = \pm r \text{ ist } y' = \mp \frac{\pi}{2}.$$

Zeichnet man also in ein Quadrat der Kantenlänge 1 eine Quadratrix und legt die Tangente an den Punkt (1/0), so wird die y -Achse bei $\pi/2$ geschnitten, was einer Inversion von $r_0 = 2/\pi$ am Einheitskreis entspricht (Abb. 25).

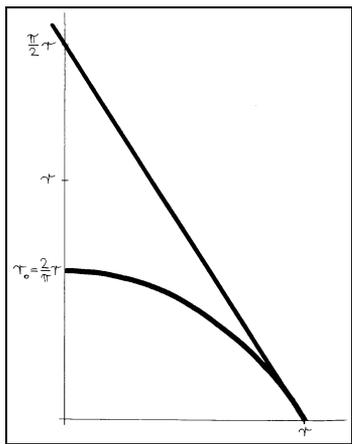


Abb. 25: Tangentenkonstruktion an die Quadratrix nach Johann Bernoulli

on $r_0 = 2/\pi$ am Einheitskreis entspricht (Abb. 25).

Somit gelangen wir zu einer geometrischen Konstruktion der Kreiszahl π . Das geht aber auch mit dem Strahlensatz (Abb. 26).

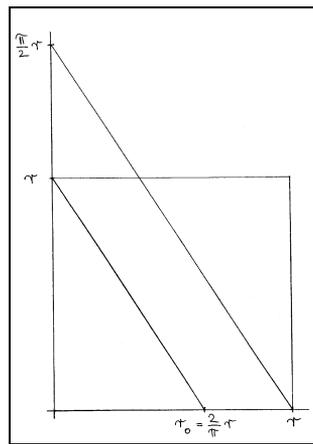


Abb. 26: Konstruktion von π mit Hilfe des Strahlensatzes und der Quadratrix.

14. Quadratrix und Schwerpunkt eines Halbkreises

Berechnet man den Schwerpunkt S eines Halbkreises mit dem Radius r , so ergibt sich: ²⁴

$$x_S = 0, \quad y_S = \frac{2r}{\pi}$$

Damit erweist sich S als Schnittpunkt der Quadratrix mit der y -Achse (Abb. 27).

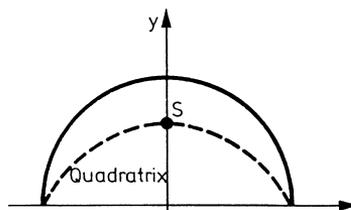


Abb. 27: Quadratrix und Schwerpunkt eines Halbkreisbogens

Trisectrix und Quadratrix sind also als Einstieg in die Analysis geeignet und bieten auch bei fortgeschrittenen Kenntnissen in Differential- und Integralrechnung noch Anknüpfungspunkte — dies alles bei historischer Verankerung.

²⁴ [HISCHER & SCHEID 1982, 1995]

4 Schluß

Da in Lehrplänen, Richtlinien etc. insbesondere *Unterrichtsinhalte* und *-ziele* definiert werden, sind *Freiräume* wohl vor allem *in der methodischen Gestaltung des Mathematikunterrichts* zu suchen. Hier ist das Verdienst VOLLRATHS zu sehen, der mit seiner Arbeit über die „methodischen Variablen“ unter anderem den Blick öffnen möchte für Gestaltungsmöglichkeiten des Unterrichts.

Ich sehe mit der von mir hier exemplarisch vorgestellten „historischen Verankerung“ eine Möglichkeit zur Ausgestaltung solch methodischer Variablen, und zwar durch Herstellung von „Beziehungshaltigkeit“ unter *kulturhistorischem Aspekt*.

Viele weitere Beispiele zur historischen Verankerung sind denkbar, etwa:

- Historisch orientierte Einführung von Grundbegriffen der Analysis wie „Stetigkeit“, „Grenzwert“, „Differenzierbarkeit“ und „Integrierbarkeit“
- „Kurve“
- LEIBNIZsches Differential bei Integrationen (Rotationsvolumen, Bogenlänge)
- Summe einer geometrischen Reihe nach TORRICELLI
- Figurierte Zahlen, Folgen und Reihen
- Zahlendreiecke
- Approximationsalgorithmen (zurückgehend bis auf den Babylonischen Algorithmus)
- ...

Hier ist eine Aufgabe der Mathematikdidaktik zu sehen, entsprechendes Material methodisch aufzubereiten.²⁵

Dabei geht es dann nicht primär um neue Inhalte, sondern um eine andere Sichtweise geeigneter Themenbereiche und somit eine besondere „Unterrichtskultur“.

²⁵ Für den Bereich der Begrifflichkeit in der Analysis wird ein derartiges Konzept bei [HISCHER & SCHEID 1982, 1995] gewählt, für die Entwicklung von konkreten Unterrichtskonzepten wird in dieser Abhandlung und in den Bezugsarbeiten [Hischer 1994 a, b] ein erster Versuch vorgenommen. Auch unterscheidet sich die hier propagierte Vorgehensweise grundsätzlich von dem von N. Jahnke vorgeschlagenen Konzept, bei welchem es um die Einbringung und Durchdringung historischen Quellenmaterials in den Mathematikunterricht geht. Insofern ergänzen sich beide Konzepte in dem Ziel stärkerer Einbeziehung historischer Aspekte in den Mathematikunterricht.

Interessanterweise findet das Konzept der „historischen Verankerung“ bereits außerhalb des Mathematikunterrichts Beachtung, so z. B. im Physikunterricht (vgl. [SÜDBECK 1992]).

Begünstigt werden solche methodischen Ansätze möglicherweise dadurch, daß aufgrund der Verfügbarkeit informatischer Methoden klassische, kalkülorientierte Unterrichtsphasen an Bedeutung verlieren und wir dadurch in die Lage versetzt werden können, alte Ziele des Mathematikunterrichts im Sinne philosophischer Betrachtungsweise stärker wirksam werden zu lassen, als das bisher vielleicht möglich war bzw. praktiziert worden ist.

5 Literatur

- ARTMANN, Benno (Hrsg.) [1982]: Aktivitäten mit dem regelmäßigen Fünfeck. *Der Mathematikunterricht* (Themenheft) **28**(1982)4.
- BERNOULLI, Johann [1924]: Die Differentialrechnung (1691/92). Nach einer Handschrift übersetzt von P. SCHAFHEITLIN. In: Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 211, Leipzig 1924.
- BOYER, Carl B. [1968]: A History of Mathematics. New York: Wiley.
- FREUDENTHAL, Hans [1973]: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. 1. Stuttgart: Klett.
- VON FRITZ, Kurt [1945]: Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont. In: Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1965. (Nachdruck aus *Annals of Mathematics* **46**(1945), 242-264)
- HISCHER, Horst [1981]: „Historische Verankerung“ als methodische Variante im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1981, S. 43.
- HISCHER, Horst & SCHEID, Harald [1982]: Materialien zum Analysisunterricht. Freiburg: Herder. (vergriffen)
- HISCHER, Horst [1994 a]: Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (1): Entdeckung der Irrationalität am Pentagon – ein Beispiel für den Sekundarbereich I. In: *Mathematik in der Schule*, **32**(1994)4, s. 238-248.
- HISCHER, Horst [1994 b]: Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (2): Lösung klassischer Probleme mit Hilfe von Trisectrix und Quadratrix – ein Beispiel für die gymnasiale Oberstufe. In: *Mathematik in der Schule*, **32**(1994)5, s. 279-291.
- HISCHER, Horst & SCHEID, Harald [1995]: Grundbegriffe der Analysis – Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag. (völlige Neubearbeitung von [HISCHER & SCHEID 1982])
- SÜDBECK, Walter (Hrsg.) [1992]: „Geschichte der Physik“. Themenheft in *Praxis der Naturwissenschaften – Physik*, **41**(1992)8.
- TOEPLITZ, O. [1927]: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der DMV* **36**(1927), S. 90-100.
- VOLLRATH, Hans-Joachim [1976]: Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht. In: *Der Mathematikunterricht* **22**(1976)5, S. 7-24. 1976.
- WITTMANN, Erich [1974]: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg (1. Auflage).