Zu den Perspektiven eines künftigen Mathematikunterrichts — Konsequenzen einer technischen Herausforderung!

Horst Hischer, Braunschweig

1 Einleitung

Eine typische Abituraufgabe könnte wie folgt beginnen:

Gegeben sei eine Funktion $f_a : x \mapsto a \cdot \cos(a \cdot x) \cdot \mathrm{e}^{\sin(a \cdot x)}$ ...

a) Der Funktionsgraph schließt zwischen der größten negativen und der kleinsten positiven Nullstelle mit der x-Achse ein Flächenstück ein ...

b) Wo liegt für $a = 1$ die kleinste positive Extremstelle? ...

c) Es sei $g_a : x \mapsto \sin(a \cdot x) \cdot f_a(x)$.
Führen Sie für diese Funktion die entsprechenden Untersuchungen durch ...

d) ...

Als Lehrer bastelt man lange herum, bis man eine passende Funktion und zugehörige Aufgabenstellungen gefunden hat, so daß damit von den Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Anforderungsbereiche in der vorgegegeben Zeit bearbeitet werden können. Und so wäre das auch bei dieser Aufgabe, wobei sich noch weitere Teile hinzugesellen würden.

Wie sieht es aber aus, wenn ein moderner Taschencomputer oder ein Tischcomputer zur Verfügung stehen würde, etwa der TI-92?

Die Aufgabe bricht dann quasi in sich zusammen! Und wie reagiert man typischerweise darauf? Der *Einsatz* solcher Werkzeuge *wird* – zumindest im Abitur – *verboten*, am besten gleich überhaupt im Unterricht.

Der Wiener Mathematikdidaktiker Günter Hanisch formulierte in diesem Zusammenhang bereits 1991 das „didaktische Trägheitsprinzip", und zwar in bezug auf den Umgang von Schulverwaltung und Lehrerschaft mit dem Taschenrechner:

Der Taschenrechner wurde

- zuerst totgeschwiegen (*Stufe 1*),
- dann verboten (*Stufe 2*),
- mit Widerwillen erlaubt (wenn ... und aber ...) (*Stufe 3*) und
- schließlich verpflichtend eingeführt (*Stufe 4*).

Ist das wirklich die Lösung? Ich stelle daher folgende **These** an den Anfang:

- *Der derzeitige Mathematikunterricht befindet sich am Beginn einer* ***Sinnkrise****.*

Dadurch, daß ich „Krise" und nicht etwa „Katastrophe" sage, möchte ich zugleich einen versöhnlichen Aspekt andeuten. Denn „*Krisis*" bezeichnet ja im Griechischen und Lateinischen eine *entscheidende Wendung*, die entweder zum Guten oder zum Schlimmen verlaufen kann, während ja eine „*Katastrophe*" stets eine *unglückliche Wendung* ist. Der Mathematikunterricht befindet sich somit m. E. im Umbruch – zugleich mit Chancen zu einer positiven Entwicklung. Dazu bedarf es jedoch einer Zielorientierung, und es ergeben sich schließlich Konsequenzen für die Lehrerausbildung.

Ich beginne mit einer Graphik, die zugleich das Netzwerk bzw. Gerüst meiner Ausführungen bildet (Abb. 1). Im Zentrum steht hier der Mathematikunterricht, der zunächst in traditioneller Weise auf der Folie der Bezugswissenschaft Mathematik erscheint. Wir sehen aber auch weiterhin, daß er in vielfältiger Weise beeinflußt wird, wobei diese Einflußfelder teilweise wechselseitig aufeinander einwirken:

- Im oberen Bereich fallen drei Einflußfelder auf, die offenbar nicht vordergründig mit dem Mathematikunterricht zusammenhängen, nämlich
  - die Einbettung des Mathematikunterrichts in ein Konzept von Allgemeinbildung, ferner
  - die Bedeutung von „Technik" und von „Spiel" für den Menschen und deren Zusammenhang mit Allgemeinbildung.

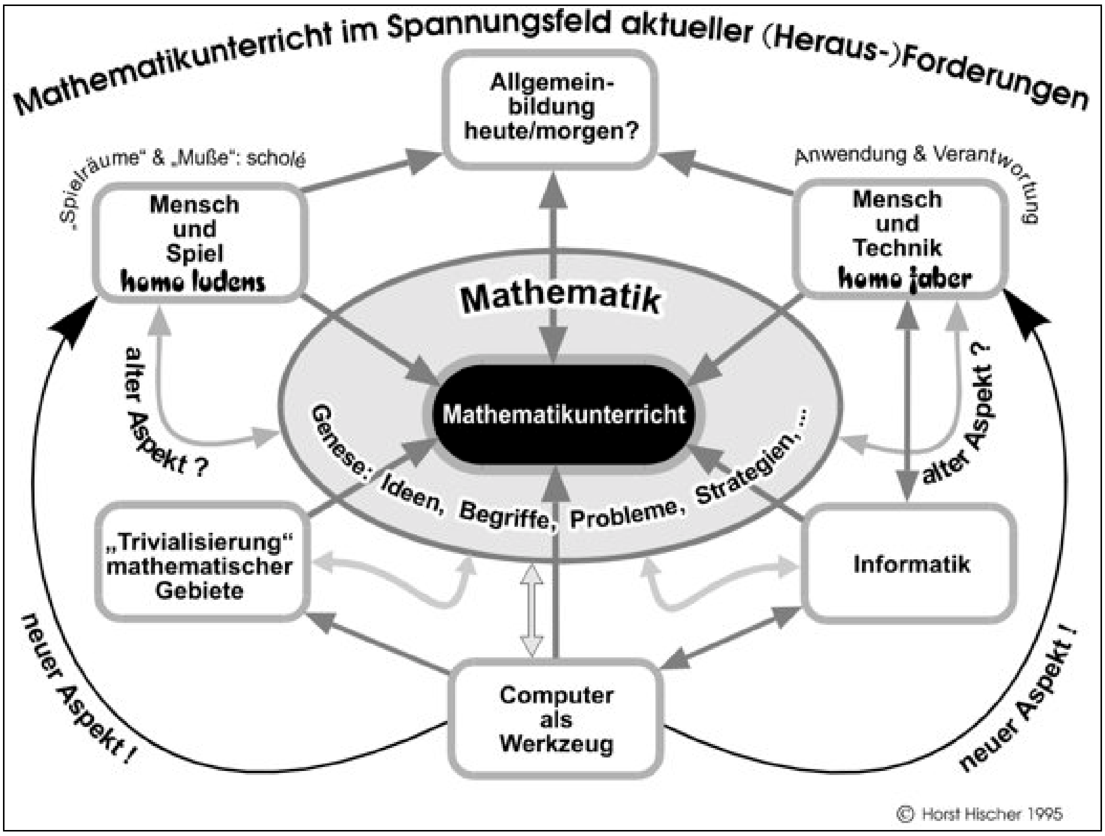

Abb. 1

- Im unteren Bereich erkennen wir dagegen drei Einflußfelder, deren Nähe zur Mathematik bzw. zum Mathematikunterricht offensichtlich ist, nämlich
  - der Einfluß der u. a. aus der Mathematik hervorgegangenen Informatik auf den Mathematikunterricht und auch auf die Mathematik selbst, zugleich ihr Zusammenhang mit dem Feld „Mensch und Technik“ und damit auch mit „Allgemeinbildung“,
  - ferner der Einfluß des Computers als Werkzeug auf die Mathematik und auf den Mathematikunterricht, damit zusammenhängend dann auch die sog. „Trivialisierung“ bestimmter mathematischer Gebiete durch den Computer. Dies werde ich gleich erläutern.
- Schließlich weisen die anderen Pfeile auf das Vorhandensein weiterer vielfältiger Beziehungen und Einflüsse hin.

Bei den oberen drei Einflußfeldern handelt es sich um Herausforderungen und Forderungen an die Schule insgesamt, von denen dann **auch** der Mathematikunterricht in spezifischer Weise betroffen ist. Eine „Sinnkrise“ wird hierdurch jedoch noch nicht notwendig hervorgerufen. Allerdings entspricht es nicht der bisherigen Tradition, Mathematikunterricht nicht nur auf der Folie von Mathematik zu sehen, und insofern wirken diese Herausforderungen wohl provokativ. Später mehr dazu.

Die unteren drei Einflußfelder beschreiben dagegen eine „hausgemachte“ Sinnkrise, die in jüngster Zeit *aus der Mathematik heraus* entsteht, und zwar in Verbindung mit der Informatik und dem Computer. Hier möchte ich mit der Erläuterung dieser Übersichtsgraphik ansetzen, werde dabei jedoch vieles nur andeuten können.

Wie komme ich nun dazu, von einer „Sinnkrise“ zu sprechen?

2 Zur „Sinnkrise“ – fachbezogene Aspekte

2.1 Informatik

Es läßt sich begründen, daß es einerseits informatische Aspekte von großem allgemeinbildendem Wert gibt, daß aber für die schulische Umsetzung solcher Absichten kein eigenes Unterrichtsfach Informatik benötigt wird. In diesem Zusammenhang entsteht also durchaus die Sinnfrage bezüglich eines künftigen Mathematikunterrichts, wobei dies nicht dramatisch gesehen werden muß, wenn nur genügend Bereitschaft entwickelt wird, Inhalte und Methoden der Informatik im Bildungsangebot der Schule und damit auch im Mathematikunterricht zu verankern. – Dies wäre allerdings ein eigenes Thema, das ich daher hier nicht weiter verfolgen kann. [1]

2.2 Der „Computer als Werkzeug" – neue Sichtweisen und Methoden

Etwas stärker tritt die „Sinnkrise" zutage, wenn wir uns dem Computer zuwenden, der zwar ein Produkt der heutigen Informatik ist, letztlich jedoch eine Materialisierung mathematischer Ideen darstellt, welche bis auf Leibniz zurückgehen. Der Umgang mit dem Computer als einem sog. „universellen" Gerät wird ja zunehmend zur „Querschnittstechnik", mit wichtigen Anwendungsmöglichkeiten auch für die Geisteswissenschaften, aber – wen sollte es wundern – er hat sich mittlerweile zu einem bedeutsamen Werkzeug *auch* innerhalb der Mathematik als Wissenschaft entwickelt: in den 70er Jahren zunächst bei den Numerikern, in den frühen 80er Jahren dann bei den Zahlentheoretikern und Algebraikern, ab Mitte der 80er Jahre bei den Vertretern der Analysis und Stochastik und heute in allen Bereichen. [2]

Der Computer ist damit über die Informatik nicht nur ein Sprößling der Mathematik, sondern er wirkt auch auf sie selbst zurück. Und zwar entwickelt er sich zunehmend zu einem Werkzeug neuer Qualität, indem er den Menschen bei geistigen Tätigkeiten unterstützt bzw. ihn sogar davon entlastet. Er wird deshalb auch vielfach als „Denkzeug" bezeichnet.

Folgende „Tätigkeiten" des Mathematikers, die von diesem „Denkzeug" unterstützt bzw. gar übernommen werden können, erscheinen mir dabei im bildungstheoretischen Kontext besonders wichtig:

- *Entdecken*, *Beweisen* und *Kalkulieren*

Es handelt sich hierbei um wesentliche mathematische Aktivitäten, die auch für den Mathematikunterricht bedeutsam, ja geradezu konstitutiv sind. [3] Und in allen drei Bereichen spielt der *Computer als Werkzeug* eine zunehmend wichtigere Rolle. Weil es sich hierbei um *humane* Qualifikationen handelt, habe ich bereits vor einigen Jahren die Rolle des Computers hierbei ganz bewußt anthropomorphisierend dargestellt: nämlich als *„Entdecker"* und als *„Beweiser"*; statt *„Kalkulierer"* hatte ich jedoch aus gutem Grunde die Bezeichnung *„Trivialisierer"* gewählt. [4] Der Aspekt des Kalkulierers bzw. Trivialisierers spielt vor allem im Zusammenhang mit Computeralgebrasystemen eine wichtige Rolle, während die Aspekte *Entdecker* und *Beweiser* insbesondere im Geometrieunterricht virulent werden – aber nicht nur dort!

Dabei ist klar, daß nicht das Werkzeug selbst „entdeckt", sondern vielmehr der Mensch mit Hilfe dieses Werkzeugs. Und entsprechend „trivialisiert" nicht der Computer, sondern ursächlich der Mensch durch die von ihm erdachten und dem Computer implantierten Algorithmen. Jedoch ist diese überzeichnende Anthropomorphisierung Absicht, indem die Rolle dieses neuartigen „Helferleins" betont wird. [5]

Dies alles sei nun kurz erläutert:

- **Computer als Werkzeug: *Entdecken* und *Beweisen***

Die folgende Graphik (Abb. 2) wurde mit einem sog. Dynamischen Geometriesystem (DGS; hier: EUKLID) erzeugt:
Es wird ein frei gewähltes Viereck mit beiden Diagonalen „gezeichnet", und dann läßt sich diese zweidimensionale Figur dreidimensional als *Tetraeder* deuten. Ferner erkennt man sofort ein *Oktaeder*, das aus den Seitenmitten dieses Tetraeders entsteht, und bei *Variation* des Tetraeders im *Zugmodus* springt ins Auge, daß gegenüberliegende Seiten des Oktaeders offenbar stets parallel und gleichlang sind.

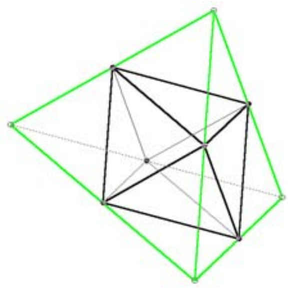

Abb. 2

Der *Computer* tritt uns hier *als Werkzeug* gegenüber, das dem *Entdecken* von Zusammenhängen *dient*. Und tatsächlich bildet der Computer für die mathematische Forschung mit seinen Möglichkeiten zum *„Erzeugen, Unterstützen und Falsifizieren von Vermutungen"*, wie Schupp es nannte, [6] ein neuartiges Werkzeug, und zwar für eine *experimentelle Mathematik*, die es in dieser Form früher nicht gab. So gibt es zunehmend an Universitäten bereits Institute für Experimentelle Mathematik – neue Arbeitsweisen entstehen, die durch *heuristische Vorgehensweisen* charakterisiert sind, indem mit Hilfe dieses Werkzeugs mathematische Zusammenhänge experimentell entdeckt oder verworfen werden.

Dazu aus der Schulmathematik ein

- **Beispiel**: *Peripheriewinkelsatz*

Wir benutzen ein DGS, z. B. auf einem Taschencomputer wie dem TI 92: [7] Auf einem Kreis werden variable Punkte markiert, und mit diesen und dem Kreismittelpunkt werden in üblicher Weise zwei Dreiecke über einer Sehne gebildet. Zusätzlich lassen sich die Maßzahlen des Zentriewinkels und des Peripheriewinkels in gewünschter Genauigkeit einblenden. Die gesamte Konstruktion ist von den Schülerinnen und Schülern mit Hilfe eines solchen Werkzeugs selbst durchführbar (Abb. 3).

Wenn nun einer der drei Punkte auf dem Kreis im sog. *Zugmodus* bewegt wird, so werden auch die Dreiecke verformt, und die jeweils zugehörigen Winkelmaße werden angezeigt. Damit wird der Peripheriewinkelsatz „entdeckt".

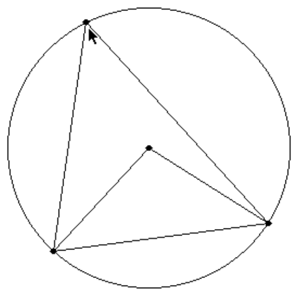

Abb. 3

Diese eigentätige Zugangsweise ist – so meine Hypothese – von ungleich anderer Qualität als die klassische Erarbeitungsweise, bei der in der Lerngruppe arbeitsteilig vorgegangen wird und dann die Ergebnisse verglichen und zusammengetragen werden. Dagegen bei Verwendung eines solchen Geometrieprogramms kann jede Schülerin und jeder Schüler die subjektive Wahrnehmung haben, selbst „beliebig viele Fälle" durchspielen zu können. Damit wird aber möglicherweise der „Beweis" für die Schülerinnen und Schüler eine deutlich andere Qualität bekommen können:

Während ein „Beweis" in der Wissenschaft Mathematik nicht nur dem Verstehen von Zusammenhängen dient, sondern methodologisch *vor allem* **das** *Instrument der Erkenntnissicherung* (unter *logischen* Aspekten) ist, wird seine Rolle (unter *psychologischen* Aspekten) wohl spätestens jetzt im Mathematikunterricht möglicherweise anders zu bewerten sein: Für die Schülerinnen und Schüler wird – so meine Hypothese – in einem solchen Fall die experimentell gewonnene Erkenntnis nicht nur Vermutung, sondern bereits Gewißheit sein – so, wie ein empirisch arbeitender Naturwissenschaftler die Gültigkeit eines Effekts durch endlich viele Versuche nachweist, die durch Fachkollegen reproduzierbar sein müssen. Es sei dahingestellt, ob wir hier vielleicht Zeugen eines Wandels sind, der uns wegführt von einer mehr „idealisierten Mathematik" hin zu einer mehr „materialisierten Mathematik"!

Unabhängig davon gilt: Das alte mathematikdidaktische Problem des *Weckens von Beweisbedürftigkeit* wird durch diese neuen Werkzeuge nicht nur nicht ausgeräumt, sondern es verschärft sich wohl!

Um so mehr kann das Beweisen (endlich!) eine neue Rolle bekommen, zugleich auch eine neue Chance in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler: Das Experimentieren offenbart zwar den Fakt, aber es erklärt nicht – d. h. die *Frage, warum das denn so ist*, wird durch das Experiment überhaupt nicht beantwortet. Und hier bedarf es nun einer Analyse der Zusammenhänge, verbunden mit Argumentieren, Begründen und ggf. Widerlegen. Der „Beweis" dieses Sachverhalts kann damit dann im Mathematikunterricht zwar einen Beitrag zum *Verstehen der Zusammenhänge* leisten, nicht aber mehr – in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler! – *zum Sichern der Erkenntnis*, wie oftmals unterstellt wird (zumindest in der Argumentation vieler Lehrkräfte gegenüber ihren Schülerinnen und Schülern zwecks Rechtfertigung solcher Beweise!).

Daher wird es vielleicht auch künftig ratsam sein, den *begründenden Aspekt eines Beweises* deutlich zu machen und ihn hervorzuheben gegenüber dem *wahrheitssichernden Aspekte eines Beweises* – vielleicht sogar: von einer *„Begründung"* zu sprechen, nicht aber von einem *„Beweis"*. Und das könnte dann *zu einer neuen „Unterrichtskultur"* führen, etwa

weg vom: *„Beweise, daß das ... gilt!"* und hin zum: *„Kannst Du begründen, warum das gilt?"*

Der Computer als Instrument der Erkenntnisgewinnung macht somit das Beweisen keinesfalls überflüssig, kann diesem Prozeß jedoch unterrichtsmethodisch und erkenntnistheoretisch eine andere Qualität verleihen.

Diverse weitere Beispiele können das ebenso demonstrieren, wobei geometrische Beispiele mit Invarianten hier besonders beeindrucken, etwa der Satz des Thales, der Schwerpunkt und der Fermatpunkt eines Dreiecks. Es sei noch ein weiteres Beispiel angeschlossen, das sich auf geometrische Invarianten bezieht.

- **Beispiel:** *Seitenmittenvieleck*

Bildet man zu einem beliebigen Viereck das *Seitenmittenviereck*, so stellt man bekanntlich überrascht fest, daß dieses offenbar immer ein Parallelogramm ist (Abb. 4) – auch bei „übergeschlagenem" Ausgangsviereck (Abb. 5)! Dies mag dann Anlaß zu geometrischen Reflexionen werden, weshalb das denn wohl so ist. (Vgl. auch das erste Beispiel zum Tetraeder!)

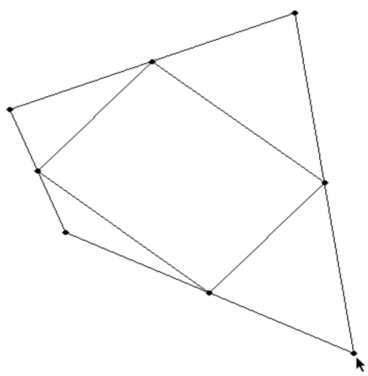

Abb. 4

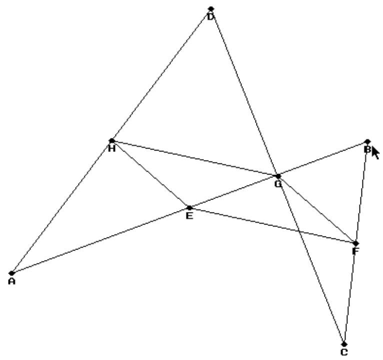

Abb. 5

Eine analoge Betrachtung bei Dreiecken liefert ein *Seitenmittendreieck*, das stets ähnlich zum Ausgangsdreieck ist, und das kann dann ein Auftakt zum Strahlensatz sein oder sich als Konsequenz aus diesem ergeben.

Und wie sieht es aus, wenn man entsprechende Untersuchungen beim Fünfeck durchführt?

Zunächst ergibt sich im Experiment als überraschendes „Ergebnis“: Das *Seitenmittenfünfeck* ist „immer“ konvex (Abb. 6). Erst sorgfältigere, d. h. vielseitigere Experimente führen zu der Einsicht, daß diese erste „Erkenntnis“ falsch war (Abb. 7).

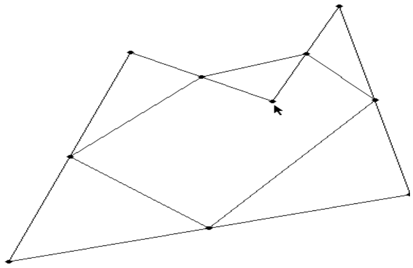

Abb. 6

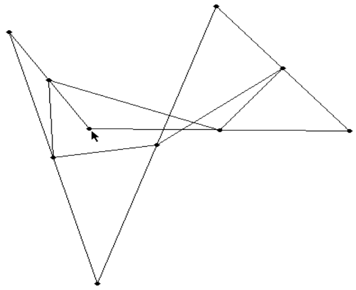

Abb. 7

Damit leistet das Experimentieren mit dem „Entdecker“ bei kluger Anwendung zugleich auch eine Einsicht in die Möglichkeiten und Grenzen der Verwendung eines solchen Werkzeugs, und zum *Begründen* gesellt sich das *Widerlegen*.

Das „Beweisen“ als wichtige mathematische Aktivität bekommt aber durch den Computer nicht nur im Mathematikunterricht eine neue Qualität, sondern z. T. auch in der Wissenschaft Mathematik: So ist das automatische Beweisen von mathematischen Theoremen, von dem schon Leibniz träumte, heute Realität geworden. Und zwar wird dieses von sog. Deduktionssystemen geleistet, die zur „Künstlichen Intelligenz“ gehören.

Dazu ein Beispiel mit dem Beweisprogramm GEOEXPERT, das eigens für den Geometrieunterricht entwickelt wurde und auf einem kleinen Expertensystem basiert. [8]

- **Beispiel**: *Kongruenzbeweis*

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck *ABC* mit gleichlangen Schenkeln *AC* und *BC*, ferner seien die Teilstrecken *AD* und *BE* gleichlang. Es liegt dann die Behauptung nahe, daß auch die Sehnen *DC* und *EC* gleichlang sind (Abb. 8).

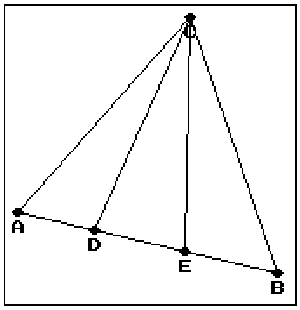

Abb. 8

Diese beiden Voraussetzungen und die Behauptung werden dem Expertensystem als Wissen bzw. als Behauptung „mitgeteilt“ und von diesem als *Knoten* in einem zweidimensionalen Netz veranschaulicht (Abb. 9). Das Expertensystem verfügt nun intern bereits über „Schlußregeln“ und ein „Grundwissen“ an Axiomen und Theoremen und versucht, aus diesem Vorrat weitere Aussagen als neue Knoten so auszuwählen, daß zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung ein Netz mit diesen Knoten *interpoliert* werden kann.

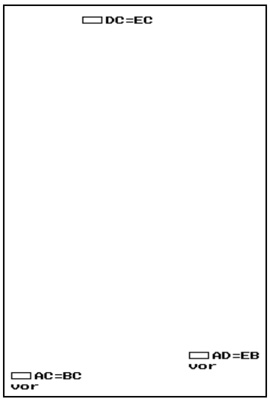

Abb. 9

Dieses Netz wird von dem Programm schrittweise interpoliert und stellt die logische Verknüpfung der einzelnen Beweisschritte und damit dann den Beweis dar (Abb. 10 bis 13).

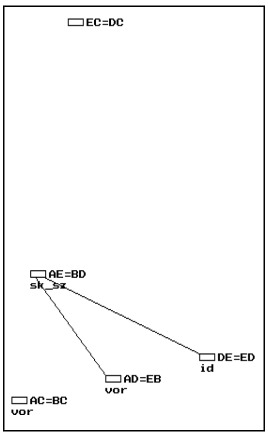

Abb. 10

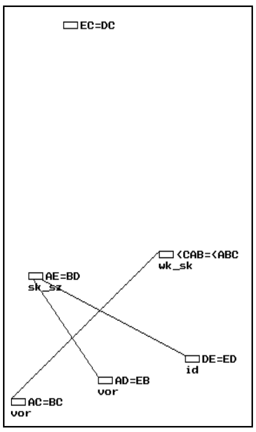

Abb. 11

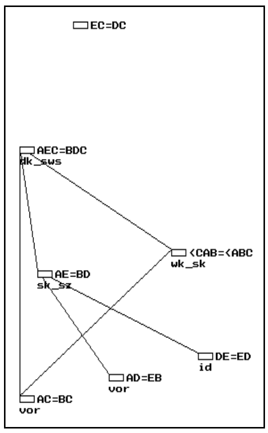

Abb. 12

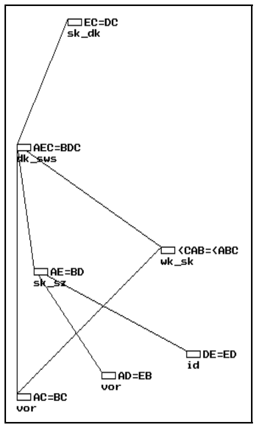

Abb. 13

Hieran sehen wir, wie solche „Beweiser“ prinzipiell funktionieren. Ferner ist auch offenkundig, daß sie zu einem Verständnis im Sinne einer „Begründung“ beitragen können, insbesondere bei Vorliegen dieser zweidimensionalen Veranschaulichung, denn man kann jetzt „verstehen“, warum der behauptete Sachverhalt gilt, auch wenn man selbst vielleicht nicht auf einen solchen Beweis gekommen ist.

Jedoch wird auch die *Beschränktheit solcher „Beweiser“* deutlich: Ein „Beweis“ im Sinne einer Lösung eines *Interpolationsproblems* kann von einem „Beweiser“ nur dann gefunden werden, wenn er lediglich mit Hilfe des ihm zu dem Zeitpunkt „bekannten“ Vorrats an Axiomen und Theoremen führbar ist. Ein Mensch als „Beweiser“ dagegen wird ggf. die spontane Idee entwickeln können, einen ganz neuen Aspekt zum Beweis heranzuziehen, um dadurch erst das Problem lösen zu können.

Andererseits tritt der Computer in der Mathematik noch ganz andersartig als „Beweiser“ auf, wie wir erstmals beim „Beweis“ des Vierfarbensatzes vor wenigen Jahren erleben mußten. Dazu ein Zitat aus dem Buch „Sternstunden der modernen Mathematik“ aus dem Jahre 1990: [9]

> Der erforderliche Rechenaufwand war so groß, daß kein Mathematiker je hoffen konnte, alle Schritte per Hand zu überprüfen. Damit hatte sich der Begriff eines „mathematischen Beweises“ plötzlich von Grund auf gewandelt. Eine Befürchtung, die seit dem Aufkommen der ersten elektronischen Computer in den fünfziger Jahren bestanden hatte, war schließlich Wirklichkeit geworden: Der Computer hatte den Mathematiker bei einem Teil der Konstruktion eines echten mathematischen Beweises abgelöst.

- **Resümee**

Der Computer wird somit in seinen neuen Rollen als „Entdecker“ (d. h. genauer: als hilfreiches *Werkzeug beim Entdecken von* Zusammenhängen) und als *„Beweiser“* zunehmend bedeutsam für die Mathematik. Ein künftiger Mathematikunterricht wird solche Aspekte den Schülerinnen und Schülern nicht vorenthalten dürfen, ihnen dazu aber notwendigerweise auch eigene Erfahrungen ermöglichen müssen. Ein Unterricht, der den Aspekt des „Entdeckers“ aufgreift, wird auch die Möglichkeiten und Grenzen der Erkenntnisgewinnung mittels solcher Werkzeuge zu reflektieren haben, um allgemeinbildenden Ansprüchen genügen zu können.

In geeigneter Weise muß ihnen aber auch vermittelt werden, daß ein mit sog. „künstlicher Intelligenz“ ausgestatteter Computer darüber hinaus als „Beweiser“ benutzt werden kann, und zwar für formallogische Beweise. Daß dafür prinzipiell geeignete Software existiert, haben wir gesehen. Dies mag helfen, den Blick zu öffnen für den Unterschied zwischen dem *formallogischen Beweisen* und dem (*kreativen*!) *Finden einer Beweisidee*, jedoch sollte auch das *zeitaufwendige Überprüfen* von Fallunterscheidungen mit Hilfe des Computers, wie etwa beim Vierfarbensatz, als neue Form des „Beweisens“, wohl aber weniger des „Verstehens“, erkannt werden.

Wir sehen somit exemplarisch, daß bereits die Verfügbarkeit des Computers Anlaß genug ist, über den Mathematikunterricht nachzudenken — oder besser: „vorzudenken“. Aus dieser „Verfügbarkeit“ folgt jedoch nach meiner Einschätzung keineswegs das Erfordernis zum ständigen Einsatz entsprechender Software beim Unterstützen der Tätigkeiten des *Entdeckens* bzw. des *Beweisens*. Vielmehr kann bereits ein *gelegentlicher Einsatz* geeignet sein, bei den Schülerinnen und Schülern andere Sichtweisen im o. g. Sinne entstehen zu lassen. Konkret heißt dies etwa für den Geometrieunterricht:

Die (gelegentliche und dann wohl eindrucksvolle) Erfahrung gemacht zu haben, *mit Hilfe des Computers als Werkzeug …*

- *Zusammenhänge entdecken zu können*, jedoch damit noch lange nicht zu wissen, warum der entdeckte Zusammenhang gilt, bzw. aufgrund eines solchen Experiments zu voreiligen Schlüssen gekommen zu sein, kann bewirken, in klassischen, „händischen“ Situationen differenzierter vorzugehen;
- zuvor entdeckte oder behauptete *Zusammenhänge beweisen zu können* (sei es nun mit Hilfe eines Deduktionssystems oder durch Bearbeitung aufwendiger Fallunterscheidungen), kann u. a. einen Beitrag dazu liefern, zu verstehen, was einen Beweis vom Finden einer Beweisidee unterscheidet.

Insgesamt scheint also der *Geometrieunterricht* aufgrund der „Verfügbarkeit“ des Computers *vor neuen Chancen* zu stehen. Zugleich wird eine Schülerorientierung im Sinne offeneren Unterrichts erleichtert.

2.3 „Trivialisierung“ mathematischer Gebiete

> Die Mathematiker haben nicht nur das Bestreben, Einsichten zu gewinnen und tiefliegende Sätze herzuleiten. Daneben bemühen sie sich ernstlich darum, allgemeine Methoden zu finden, mit deren Hilfe gewisse Klassen von Problemen systematisch behandelt und sozusagen automatisch gelöst werden können. Jede neu gefundene Methode ist ein Fortschritt der Mathematik. Damit wird allerdings der durch diese Methode beherrschte Aufgabenkreis **trivialisiert** und hört auf, ein interessantes Gebiet der schöpferischen Mathematik zu sein.

Das schrieben Hermes und Markwald vor rund dreißig Jahren in Band 1 der von Behnke et al. herausgegebenen „Grundzüge der Mathematik“ [10], und sie trafen damit die Situation, vor der wir m. E. heute stehen, vorausschauend und treffend.

So galt z. B. die Beherrschung arithmetischer Techniken einst als anspruchsvolle geistige Leistung – ja gar als ein Merkmal von Bildung. Der Computer – und mit ihm der Taschenrechner – hat solche menschlichen Fertigkeiten längst entzaubert und sie zur stupiden Rechenarbeit degradiert, die man lieber einer Maschine anvertraut. Der österreichische Mathematiker Buchberger [11] nennt das – ganz im Sinne von Hermes und Markwald – *„Trivialisierung der Arithmetik durch den Computer“*. Als Werkzeug nimmt der Computer dabei die klassische numerische Rolle als *Rechner*, *Graphiker* und *Textverarbeiter* wahr.

Das eigentlich Brisante sind die Möglichkeiten symbolischen Rechnens: Denn mittlerweile ist die technische Entwicklung bei Hard- und Software so weit gegangen, daß nun außerordentlich leistungsfähige Programme vorliegen, mit denen man komplexere Strukturen wie *Terme* und *Formeln* bearbeiten kann.

Damit tritt der Computer für den Anwender in neuen, formalen Rollen auf, die zum *„symbolischen Rechnen“* gehören, nämlich als:

Termumformer – **Gleichungslöser** (algebraisch!) – **Differenzierer** (algebraisch!) – **Integrierer** (bestimmt/unbestimmt)

Programme, die Derartiges leisten können, heißen *Formelmanipulationssysteme* oder *Computeralgebrasysteme* (CAS) und sind heute bereits für den PC verfügbar, so etwa die Programme DERIVE, MATHEMATICA oder MAPLE und z. T. sogar schon für neuartige *„Taschencomputer“* wie den TI 92. [12] Das bedeutet also, daß damit auch das *Gebiet* der Formelmanipulation oder *des symbolischen Rechnens* im Sinne von Buchberger *„trivialisiert“* worden ist und somit der „Bronstein“ entbehrlich werden könnte!

Der Begriff „Trivialisierung“ wird in diesem Zusammenhang von Buchberger 1989 sinngemäß wie folgt ausgeschärft: [13]

> Ein mathematisches Gebiet heißt „trivialisiert“, sobald ein ausführbarer und effizienter Algorithmus existiert, der jedes gegebene Problem dieses Gebiets löst.

In diesem Sinne sind mittlerweile die „Gebiete“ *»Integration elementarer transzendenter Funktionen«* und *»Beweisen geometrischer Sätze«* trivialisiert worden.

Die sog. „Computeralgebra“ basiert auf entsprechenden Algorithmen, die in Verbindung mit heutiger Hardware die menschlichen Leistungen um Größenordnungen übertreffen. Der Algorithmus von Risch entscheidet etwa für jeden vorgelegten Integranden, ob eine Stammfunktion existiert, und im Falle der Existenz wird auch ein Term einer Stammfunktion angegeben (Abb. 14). Und erst recht ist das Gebiet „Termumformungen“ trivialisiert worden (Abb. 15).

Bei solchen Tätigkeiten wie Termumformungen, Gleichungslösen, Differenzieren und Integrieren handelt es sich um die *Ausführung von Kalkülen*, weshalb man diese Tätigkeiten auch als „Kalkulieren“ bezeichnen kann.

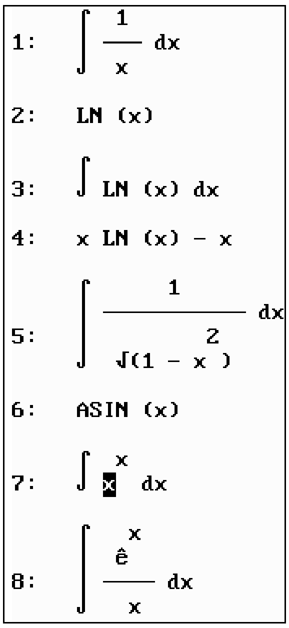

Abb. 14

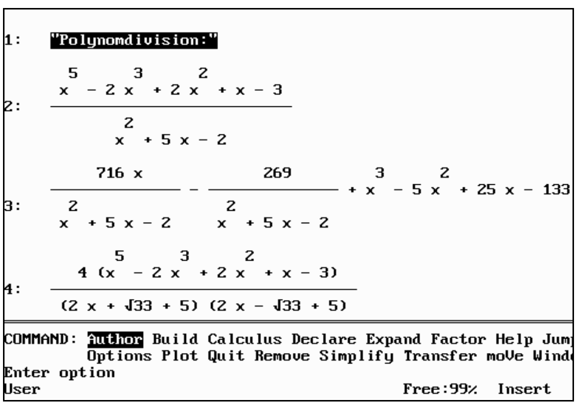

Abb. 15

Die hier verwendeten (unsichtbaren!) Algorithmen „trivialisieren" nun dieses Kalkulieren – jedoch tritt diese „Trivialisierung" erst durch und über den Computer in Aktion und wird somit für den Menschen spürbar. [14] Ich bezeichne daher den Computer unter diesem dritten Aspekt als „**Trivialisierer**" – wiederum ganz bewußt anthropomorphisierend.

Der Aspekt des „Trivialisierers" ist insofern von besonderer Bedeutung, weil er in qualitativ ganz anderer Weise auf den Mathematikunterricht wirksam wird als etwa der „Entdecker" und der „Beweiser": Denn diese Trivialisierung hat möglicherweise Konsequenzen für den Mathematikunterricht, auch ohne daß Computer eingesetzt werden, weil der Stellenwert bestimmter Gebiete des traditionellen Mathematikunterrichts drastisch sinken kann:

Bedenken wir nämlich, daß ein wesentlicher Teil des bisherigen, realen Mathematikunterrichts der Erarbeitung und Festigung von Kalkülen dient – also dem „Kalkulieren", z. B. Termumformungen, Gleichungslösen, Differenzieren, Integrieren – und dieses Kalkulieren nun nicht mehr – wie bisher – dem Menschen vorbehalten ist, sondern von solchen neuartigen Systemen, also den „Trivialisierern", übernommen werden kann, so gelangen wir unweigerlich zu der Frage, welche dieser „Kalkülkompetenzen" künftig noch in welchem Umfang erforderlich im Sinne von „allgemeinbildend" sind. Diese Frage ist für die Mathematikdidaktik neu und noch nicht mal ansatzweise beantwortet.

Solche neuen Taschencomputer werden sicherlich bald in die Schulen einziehen, so wie es erst mit den Tafelwerken, dann mit dem Rechenstab und schließlich mit den Taschenrechnern geschah. Aber wenn dann einerseits das Kalkulieren auch in der Analysis und der Linearen Algebra nicht mehr von Hand erledigt werden muß und andererseits interaktive, dynamische Geometrie auf dem Taschencomputer möglich ist, dann ist die Sinnkrise des Mathematikunterrichts offenbar, und es entsteht die Frage, an welchen Zielen sich ein künftiger Mathematikunterricht wohl orientieren sollte bzw. könnte!

3 Fachübergreifende Aspekte

• Technologie und Spiel

Ich greife hierbei zunächst auf eine frühere „Standortbestimmung" von mir für den Mathematikunterricht [15] zurück (Abb. 6): Der *Mathematikunterricht* steht hier nicht etwa im Mittelpunkt der Welt, sondern er steht *als Teil dieser Welt im Mittelpunkt meiner Betrachtungen*. Die wesentlichen Aussagen in dieser Graphik sind die folgenden:

- Ein künftiger „Mathematik"-Unterricht erfordert nicht nur Mathematik als fachliche Bezugswissenschaft, sondern (zumindest) auch Informatik, wie bereits erwähnt – wobei es inhaltliche Überschneidungen zwischen diesen beiden Disziplinen Mathematik und Informatik gibt.
- Gemessen an Defiziten des derzeitigen Schulsystems, die für mich subjektiv erkennbar sind, sehe ich weiterhin folgende *Dimensionen für die Formulierung von Zielen und die Auswahlentscheidung für Inhalte und Methoden*:

  Technologie als *verantwortungsethisch orientierter Anwendungsbezug*

  Spiel als *nicht auf Nutzen gerichteter Gegenpol zum Anwendungsbezug*

Das bedarf einer Erläuterung dieser Begriffe und einer Begründung ihrer Allgemeinbildungsrelevanz:

Technologie: Zur „Technologie" gehört nach heutigem philosophisch-sozialwissenschaftlichen Verständnis die *Reflexion der Folgen des eigenen und des kollektiven technischen Planens und Handelns*, was zur *verantworteten Technikgestaltung* führt. Es geht also um das „Prinzip Verantwortung" im Sinne von Hans Jonas. Ich nenne das in Anknüpfung an eine Bezeichnung des Philosophen Max Scheler aus dem Jahre 1926 den „Aspekt des ***homo faber***", [16] und für den Technikphilosophen Walther Chr. Zimmerli ist das damit verbundene Menschenbild normativ im Sinne einer „*Verpflichtung zur ethischen Reflexion*". [17]

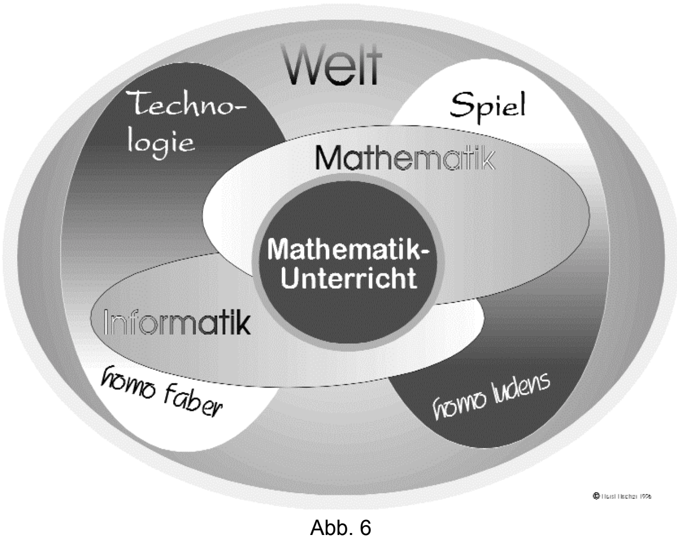

Abb. 6

Spiel: Der Erziehungswissenschaftler Horst Ruprecht fordert sehr nachdrücklich Aspekte von „Spiel“ in der Schule. Dabei stützt er sich einerseits auf die Beobachtung einer „kognitiven Überbetonung“ des Unterrichts, die im Zusammenhang mit der sog. „Wissenschaftsorientierung“ entstanden ist.

Andererseits weist er darauf hin, daß der Mensch „*das am längsten spielende und am meisten des Spielens bedürftige Wesen*“ sei, und er leitet hieraus die Forderung ab, daß das Bildungsangebot der Schulen sich in allen Fächern wieder für die „*Spiel-Räume des Denkens*“ öffnen müsse. Ruprecht benutzt dabei den Begriff „Spielraum“ im Sinne von „spielerischer Freiraum“ als freie Übersetzung des griechischen „scholé“ für „Muße“ (worauf ja unser heutiges „Schule“ sprachlich zurückgeht). Er ruft damit eindringlich zu *mehr Muße in der Schule* auf. Auch für den Mathematikunterricht entstünden demgemäß besondere Aufgaben, und er schreibt: [18]

> Mathematik ist ein grandioses Spiel des Geistes, und als solches müßte sie in den Schulen erscheinen.

Spielerische Aspekte in der Schule zu berücksichtigen, wird in letzter Zeit in der pädagogischen Literatur zunehmend gefordert, so etwa im „Friedrich Jahresheft XIII; 1995“ mit dem Titel: „*Spielzeit – Spielräume in der Schulwirklichkeit*“. Ich nenne das im Kontrast zum bereits erwähnten „Aspekt des *homo faber*“ den „Aspekt des ***homo ludens***“ und knüpfe damit an die Betrachtungen des Niederländers Johan Huizinga aus dem Jahre 1938 an. [19]

Doch was ist eigentlich ein „Spiel“? Ich beschränke mich hier auf die Angabe von Eigenschaften desjenigen Prototypen, auf den sich meine Konzeption bezieht, wobei die Aufzählung nicht abschließend zu verstehen ist: [20]

Das **Spiel** ...
- findet seinen Sinn in sich selbst,
- es erzeugt Freude,
- es ist weitgehend nicht auf Nutzen oder konkrete Anwendung gerichtet,
- es wird individuell, häufig in Gruppen, durchgeführt, hat damit auch eine soziale Komponente,
- es findet dabei durchaus nicht regellos statt, wie wir schon an dem Wort „Spielregeln“ sehen, die sozial ausgehandelt werden müssen,
- es erfordert von allen Mitspielern Aktivität, d. h., es gibt kein „passives Spielen“,
- es bedarf dennoch der *Muße*.

Bei der **Technologie** geht es hingegen um
- *konkrete Anwendungen* von Theorien und Verfahren, denn
- Technik ist *auf Nutzen gerichtet*, und
- wegen der möglichen *Folgen* ist aus Gründen der *Verantwortlichkeit* eine *kritische Reflexion* des eigenen und gemeinschaftlichen Tuns unter ethischen Aspekten erforderlich.

In diesem Sinn unterscheiden sich die allgemeinbildenden Dimensionen „Spiel“ und „Technologie“ grundsätzlich, und man könnte die wesentlichen Unterschiede etwa wie folgt hervorheben:
- Zur *Technologie* gehört stets eine *Außenwirkung*, die zu verantworten ist,
- das *Spiel* hingegen ist primär *ohne Außenwirkung*, denn es ist nach innen gerichtet.

Den mit dem *homo faber*, also mit „Technologie“, verbundenen Bildungsaspekt nenne ich „*technologische Bildung*“, hingegen geht es bei dem *homo ludens*, also beim *„Spiel“*, um eine „*vielseitige, individuell ausgerichtete Bildung*“, die den ursprünglichen Bildungsauftrag von Schule im Sinne von „scholé“ (also von „Muße“) betont.

Welche Stellung haben nun „Spiel“ und „Technologie“ in einem künftigen Verständnis von „Allgemeinbildung“? Ich komme dazu auf die Eingangsgraphik zurück (Abb. 1).

• Allgemeinbildung heute und morgen?

Hier ist insbesondere Wolfgang Klafki zu nennen, ohne jedoch sein Allgemeinbildungskonzept im Rahmen dieses Vortrags auch nur anreißen zu können. Ich möchte lediglich auf folgendes hinweisen: Abgesehen davon, daß *Allgemeinbildung* eine *Bildung für alle* sein muß, ist für Klafki Allgemeinbildung durch die folgenden beiden Aspekte wesentlich gekennzeichnet:

1. *Bildung im Medium des Allgemeinen*
2. *Bildung in allen Grunddimensionen menschlicher Fähigkeiten*

Ad 1: Hier geht es um einen verbindlichen Kern dessen, das alle gemeinsam angeht, und zwar mit dem Ziel, daß jeder einzelne ein „geschichtlich vermitteltes Bewußtsein von zentralen Problemen der Gegenwart und – soweit voraussehbar – der Zukunft“ gewinne, genannt: „Schlüsselprobleme“, z. B. Gefahren und Möglichkeiten der neuen Informations- und Kommunikationstechniken und -medien. Damit gehört aber auch das Einflußfeld „Mensch und Technik“ mit dem Aspekt „Technologie“ hierher.

Ad 2: Hiermit meint Klafki, daß Allgemeinbildung auch die Eigenschaft vielseitiger Bildung aufweisen muß. Das bedeutet insbesondere eine Schülerorientierung in dem Sinne, daß sich die Schülerinnen und Schüler auch als Individuen mit eigenen Wünschen und Neigungen erfahren müssen. Es sollte deutlich geworden sein, daß das „Spiel“ zu diesem zweiten Allgemeinbildungsaspekt von Klafki gehört, und insofern ist das Einflußfeld „Mensch und Spiel“ zu verstehen.

- **Mathematik als Technologie** [21]

Über das Feld „Mensch und Technik“ wird aber auch die Mathematik selbst angesprochen, denn sie entwickelt sich ja mit steigender Tendenz zu einem unentbehrlichen Werkzeug in Wissenschaft und Gesellschaft und bekommt damit Züge einer Technologie im philosophisch-sozialwissenschaftlichen Sinn. Entsprechend würden in diesem Sinne Ziele für einen künftigen Mathematikunterricht zu entwickeln sein, in denen herauszustellen wäre, wie die Schülerinnen und Schüler einerseits erleben können, in welcher Weise Mathematik tatsächlich anwendbar ist, wie sie aber auch erfahren können, daß die ethische Frage nach der Verantwortlichkeit für die Folgen des eigenen und kollektiven Tuns sich auch für den Mathematiker stellt.

Zu dieser kritischen Betrachtungsweise gehören dann auch **Grenzen der Anwendbarkeit von Mathematik**, die zum Beispiel folgende Bereiche betreffen: [22]

- Unterschied zwischen mathematischer Sprache und natürlicher Sprache,
- Unterschied zwischen mathematischer, zweiwertiger Logik (also dem „tertium non datur“) und einer „realitätsbezogenen“ Logik wie der „Fuzzy logic“.

4 Mathematikunterricht auf der Folie von Mathematik

In traditioneller Sichtweise wird der Bildungsauftrag des Mathematikunterrichts darin gesehen, daß er ein „gültiges Bild der Mathematik“ zu vermitteln habe – Mathematikunterricht also „auf der Folie von Mathematik“. Hält man an dieser Vorstellung fest, dann ist jedoch folgendes zu beachten: Meine Ausführungen und die Eingangsgraphik (Abb. 1) sollten deutlich machen, daß die Mathematik ihrerseits vielfältigen Einflüssen ausgesetzt ist und damit wohl das sog. „*gültige Bild von Mathematik*“ einem Wandel unterliegt.

Ich habe angedeutet, daß Mathematik sowohl Züge des Spiels als auch einer Technologie hat. Um auf dieser Basis nun eine inhaltlich orientierte Zieldiskussion für einen künftigen Mathematikunterricht führen zu können, wird man nicht umhin kommen, **fundamentale Ideen** der Mathematik im Sinne von Bruner zu diskutieren, denn: Fundamentale Ideen einer Disziplin können helfen, allgemeine Ziele eines Unterrichtsfachs auszuhandeln. Hierbei sehe ich die Notwendigkeit der Einbeziehung fundamentaler Ideen auch der Informatik in diesen Diskurs, um dann möglicherweise Ziele eines künftigen „Mathematikunterrichts“ um einen *Kern aus fundamentalen Ideen beider Disziplinen* (als gemeinsamen fachlichen Bezugswissenschaften) zu entwickeln. [23]

Zu diesen *Ideen* gehören dann aber auch notwendig *Begriffe* und *Probleme*, ferner auch *Strategien* zur Lösung dieser Probleme, und das führt mich abschließend zu einem weiteren wesentlichen Aspekt, nämlich

Geschichte der Mathematik als methodische Leitlinie:

Zur kritischen Reflexion der verwendeten Methoden und Werkzeuge, aber auch zur Würdigung der zweifellos seit Anbeginn spielerischen Aspekte mathematischen Tuns gehört notwendig ein Blick in die historische Entwicklung der Begriffe, Ideen, Probleme und Strategien. In diesem Sinn kann „Geschichte der Mathematik“ ein spannender didaktischer Aspekt zur methodischen Gestaltung von Unterricht sein. Und zwar wird durch eine solche „historische Verankerung“ eine innermathematische Beziehungshaltigkeit unter kulturhistorischem Aspekt erreicht – eine „Verankerung“ zugleich auch im Sinne von Ausubel. [24] Dabei geht es dann nicht primär um neue Inhalte, sondern um eine andere Sichtweise und damit andere methodische Zugänge geeigneter Themenbereiche. Dies könnte Gegenstand eines eigenen Vortrags sein.

Lassen Sie mich zum Abschluß nun aus subjektiver Sicht Perspektiven für die Weiterentwicklung an Konzepten für einen künftigen Mathematikunterricht skizzieren, die sich an meine bisherigen Ausführungen anschließen.

5 Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht

5.1 Aufgaben der Mathematikdidaktik

1. Zunächst wird es darum gehen müssen, die

inhaltliche und organisatorische Weiterarbeit an Konzeptionen zur Berücksichtigung des Computers als Werkzeug, Medium und Tutor

energisch

voranzutreiben, und zwar insbesondere unter Berücksichtigung der neuen technischen Möglichkeiten für

- *graphische Taschencomputer* (GTR) und
- *leistungsfähige Personalcomputer* für
  - Funktionenplotter,
  - Rechenblätter,
  - Computeralgebra (z. B. DERIVE, MATHEMATICA, MAPLE, ...),
  - Software für Modellbildung und Simulation und
  - interaktive Geometrieprogramme (z. B. CABRI GÉOMÈTRE, EUKLID, GEOLOG, THALES, ...).

Bei den Personalcomputern sind vor allem rechtzeitig die sich abzeichnenden Entwicklungen zur Miniaturisierung zu berücksichtigen, die dazu führen werden, daß schon bald „Taschencomputer“ der neuen Generation allseits verfügbar sind, die auch symbolische Operationen im Sinne von „Trivialisierung“ ermöglichen.

Im Bereich der Geometrie werden wir jedoch wohl weiterhin auf Geräte mit großem, hochauflösendem Display und Maus angewiesen sein, weil sonst ästhetisch kein Genuß entsteht. Interaktive Konstruktions- und Beweisprogramme werden hier sicherlich eine große Bedeutung erlangen.

Diese wichtigen, methodisch orientierten Aufgaben der Mathematikdidaktik führen zwangsläufig aber auch zu solchen Aufgaben, die Ziel-, Inhalts- und Sinnfragen betreffen. Und zwar sehe ich hier folgende weiteren beiden großen Aufgabenblöcke:

2. **Inhaltliche Entschlackung** und *ggf.* **neue Sinnbestimmung** des Mathematikunterrichts aufgrund
- der *Verfügbarkeit informatischer Methoden*, auch in der Mathematik,
- der Berücksichtigung *fundamentaler Ideen* von Mathematik *und* Informatik,
- der Berücksichtigung der pädagogischen Diskussion um *Allgemeinbildung*,
- der Berücksichtigung technologischer Aspekte im Sinne der Realisierung einer *technologischen Bildung*, welche die Beachtung und Betonung der *Grenzen der Anwendbarkeit* der entsprechenden Methoden aus Mathematik und Informatik und ggf. ethische Aspekte mit einschließt,

dabei insbesondere

- des Vorhandenseins von *„Trivialisierern“* (und damit des Verfalls klassischer Bereiche des *realen Mathematikunterrichts* bis hin zur Bedeutungslosigkeit im Sinne von: **„Wieviel Termumformung braucht der Mensch?“**), verbunden mit der möglichen *Entstehung von „Freiräumen“*.

3. Inhaltliche und methodische **Ausgestaltung von Freiräumen** zu „Spielräumen“, wie es Horst Ruprecht nennt. Und zwar geht es hier um Möglichkeiten zur Entstehung von *„Muße“* im Sinne des griechischen *„scholé“*, worauf ja unser Begriff „Schule“ zurückgeht, was leider in Vergessenheit geraten ist.

Eine solche Ausgestaltung von möglichen Freiräumen ist denkbar durch
- *neue Ziele*,
- *neue Akzentuierung alter Ziele* bzw.
- *neue Wege zu alten Zielen*.

Hierbei kann *auch* der konkrete Computer*einsatz* eine wichtige Rolle spielen.

Wenn es denn eine solche „Trivialisierung“ mathematischer Gebiete durch Hardware und Software – also z. B. neuartige Taschenrechner bzw. *Taschencomputer* oder Computer mit Software – gibt, so ergeben sich mit Sicherheit zumindest die folgenden

drei *Fragen*,

die von der Mathematikdidaktik und damit auch von uns zu bearbeiten sind:

(1) Was ist bei der Verwendung von „Trivialisierern“ – und anderer Software – im Mathematikunterricht zur Erreichung *bisheriger* Bildungsziele zu beachten?

Das ist eine naheliegende Frage, die vom bestehenden Curriculum ausgeht und von der Suche nach methodischen Verbesserungsmöglichkeiten mit Hilfe des Computers als einem Werkzeug geleitet wird.

Hierzu gehört dann auch die Frage, welche Rolle solche Systeme künftig bzw. schon jetzt beim Abitur spielen sollen, etwa: Abitur mit DERIVE?

Auch sind in diesem Zusammenhang folgende weitere anthropomorphisierende Aspekte des Computers zu beachten: [25]

- Der Computer als „Produzent“ von Material bzw. Beispielen

Graphische und rechnerische Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler können umgangen werden, so daß alle die gleichen Voraussetzungen haben, Gesetzmäßigkeiten zu entdecken. Umfangreiches Datenmaterial (Zahlenmaterial, Bildmaterial und graphisches Material) erleichtert die Verallgemeinerung von festgestellten Regelmäßigkeiten, und der Schwerpunkt des Unterrichts kann auf das Aufstellen von Hypothesen, das Formulieren von Sätzen sowie das Beweisen derselben gelegt werden. Beispiel: Das Seitenmittenviereck eines beliebigen Vierecks ist stets ein Parallelogramm (s. o.).

- Der Computer als „Täuscher“

Durch die Erfahrung der Grenzen z. B. der Graphikauflösung des Rechners oder von Rundungsproblemen wird die Notwendigkeit einer kritischen Untersuchung und Interpretation der vom Computer angebotenen Lösung deutlich.

Beispiele:

– „Konvergenz“ der harmonischen Reihe
– Der Graph von $\sin(kx)$ ist bei passend großem k nicht von dem von $\sin(x)$ zu unterscheiden (Abb. 7 für $k = 96$; Wert von k abhängig vom jeweiligen Display und weiteren Parametern → „**Stroboskopeffekt**“).

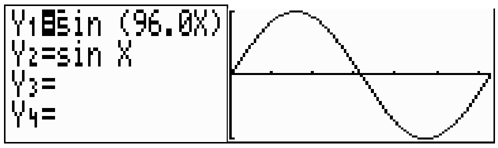

Abb. 7

Neben dieser Frage nach Berücksichtigung der Möglichkeiten, Bedingungen und Folgen des Computereinsatzes im Rahmen des bisherigen Curriculums müssen aber im Zusammenhang mit Trivialisieren auch folgende, *inhaltlich zukunftweisende Fragen* gestellt werden:

(2) Gibt es *neue Bildungsziele* für den Mathematikunterricht *durch* die *Verwendung*(smöglichkeit) *von „Trivialisierern“* im Unterricht?

(3) Gibt es *neue Bildungsziele* für den Mathematikunterricht *aufgrund der Existenz von „Trivialisierern“* –

und zwar ohne daß diese im Unterricht eingesetzt werden (müssen)?

Während die zweite Frage eigentlich eine sachlogische Vertiefung der ersten darstellt, ist die dritte von völlig neuer Qualität: Denn hier wird unterstellt, daß durch „Trivialisierung“ bestimmte kanonisierte Bereiche des Mathematikunterrichts an Bedeutung verlieren oder gar entbehrlich werden können, was dann die Entstehung von Freiräumen für neue Zielsetzungen zur Folge haben könnte.

5.2 Chancen und Probleme

Plakativ ließe sich das etwa folgendermaßen ausdrücken:

- **meditieren statt differenzieren?**

Dieser Punkt ist insofern besonders bedeutsam, weil er eine spielerisch-philosophische Qualität des Mathematikunterrichts betont – im Sinne einer anderen Unterrichtskultur; denn „meditieren“ bedeutet „sinnierend betrachten“ oder „versenken“. Natürlich stoßen wir damit auf Wagenschein!

Zusammenfassend mit dem Vorhergehenden läßt sich folgende Frage anschließen:

- Ergeben sich aufgrund der Existenz von Trivialisierern vielleicht neue *Chancen für den Mathematikunterricht* –

  Chancen, die wir uns eigentlich schon immer gewünscht haben?

Möglicherweise werden wir in diesem Zusammenhang einen keineswegs neuen Aspekt des Mathematikunterrichts wieder beleben können (oder müssen?): den ***mathematischen Aufsatz***! Auch wird besonderes Augenmerk der Entwicklung künftiger Aufgaben-Prototypen sein, Aufgaben, die möglicherweise weniger eng und „konvergent" als bisher, sondern offener und eher „divergent" zu konzipieren sind.

Dabei muß zugleich berücksichtigt werden, daß ein künftiger Mathematikunterricht bei Wegfall „trivialisierter Gebiete", die als kalkülhafte Bereiche bisher einen quantitativ großen Teil des Unterrichts einnehmen, nicht leichter und schon gar nicht „trivial" wird. Wenn dann noch der Druck auf die Bildungspolitik seitens der Informatik über mächtige Interessenverbände immer stärker wird, und wenn dann ferner die Meinung wachsen sollte, daß angeblich mittels informatischer Methoden Anwendungsprobleme besser lösbar seien, als es im herkömmlichen Mathematikunterricht vermittelt wird – was bleibt dann?

Wenn wir nicht rechtzeitig die Kraft zur Reflexion, Fundierung und Weiterentwicklung der Zielsetzungen eines künftigen Mathematikunterrichts entwickeln, dann wird dieser wohl – so meine Vermutung bzw. Befürchtung – eine Qualität erhalten, die ihn in die Nähe des Philosophieunterrichts rückt.

Philosophieunterricht ist aber erstens kein Pflichtfach (wie jetzt i. d. R. der Informatikunterricht) und wird außerdem etwa nur zweistündig erteilt (wie ebenfalls der derzeitige Informatikunterricht)!

Was bleibt also?

Man vereinige wesentliche, „fundamentale" Ideen aus den beiden Disziplinen „Informatik" und „Mathematik", um daraus ein neues, gewichtiges, zukunftsorientiertes Unterrichtsfach zu konzipieren!

Der Name dieses Fachs? Was spricht gegen „Mathematikunterricht"?

Ich sehe daher künftig neben Mathematik auch Informatik als fachliche Bezugswissenschaft eines *neuartigen „Mathematik"-Unterrichts*. Wir brauchen somit keine Konfrontation zwischen den Interessengruppen der Fächer Mathematik und Informatik, sondern wir sollten auf eine Integration drängen, denn

- auch eine Kooperation wird letztlich nicht gelingen,
- und es gibt noch andere gewichtige Aspekte von Schule außer Mathematik und Informatik!

6 Konsequenzen für die Lehrerausbildung

Meine Überlegungen haben schließlich auch Konsequenzen für die Lehrerausbildung, und zwar in beiden Ausbildungsphasen. Dazu einige

Schlußthesen:

Die Ausbildung künftiger „Mathematik"-Lehrerinnen und -Lehrer sollte folgenden Ansprüchen genügen:

1. eine fachwissenschaftliche Ausbildung in Mathematik *und* Informatik, unter Einbeziehung theoretischer und praktischer Aspekte bezüglich „Computer als Werkzeug",
2. eine fachdidaktische Ausbildung unter Berücksichtigung „fundamentaler Ideen" aus Mathematik und Informatik, verbunden mit historischen Betrachtungen bezüglich der Genese von Ideen, Begriffen, Problemen und Strategien, auch hinsichtlich der Bedeutung von „Kalkülkompetenz",
3. eine fachübergreifende philosophisch-sozialwissenschaftliche Ausbildung bezüglich „Mensch und Technik" im Sinne von Zielsetzungen einer „technologischen Bildung", vor allem auch
4. ein Kennenlernen von „Muße" und spielerischen Aspekten.

Da diese Forderungen wohl unter den zu erwartenden Rahmenbedingungen einer verkürzten Studienzeit einzulösen wären, ergänze ich sie um zwei weitere:

5. Entschlackung des Studiums unter gleichzeitiger Beschränkung auf auszuhandelndes „Wesentliches" zugunsten exemplarischer Vertiefung,
6. Schaffung eigener Lehramtsstudiengänge – auch für das Lehramt an Gymnasien.

Gerade der letzte Punkt wird wohl Irritationen und Widerstand hervorrufen und mit Befürchtung einer Niveausenkung vorgetragen werden. Jedoch wird eher das Gegenteil richtig sein: Ich halte es für untragbar, zukünftigen Mathematiklehrerinnen und -lehrern Mathematik (und auch Elemente der Informatik) nur als Fertigprodukt im Sinne eines wohldurchdachten, ausgefeilten Systems vorzusetzen, ihnen jedoch die wesentliche Erfahrung des Suchens, Irrens, Probierens, Entdeckens – also: des Forschens – vorzuenthalten. Dies wäre nun einen Vortrag zum Thema „Irrtum" wert: Ich plädiere nämlich eindringlich für eine Unterrichtskultur, die das „Schülerrecht auf Irrtum" pflegt – in Anküpfung an das Buch von Bernd Guggenberger: *„Das Menschenrecht auf Irrtum"*. Statt dessen begnüge ich mich in diesem Zusammenhang mit der Nennung der beiden folgenden Zitaten:

Aus Bertold Brecht, Geschichten vom Herrn Keuner:

„Woran arbeiten Sie?“ wurde Herr K. gefragt. Herr K. antwortete:
„Ich habe viel Mühe, ich bereite meinen nächsten Irrtum vor.“

Aus Odo Marquard, Apologie des Zufälligen:

„Wir irren uns empor.“

Hierzu gehört auch, den Schülerinnen und Schülern zu vermitteln, daß mathematische Begriffe weder absolut noch starr sind, sondern sowohl in kultur- und wissenschaftsgeschichtlicher als auch in anwendungs- und kontextbezogener Hinsicht dynamisch und vielfältig sind, daß also das Bilden von Begriffen und Definitionen stets ein kreativer Prozeß ist, der mit vielen Irrtümern verbunden ist. Das alles ist jedoch nur bei quantitativer Reduktion und qualitativer Ausweitung möglich und erfordert Lehrveranstaltungen besonderer Art – zumindest teilweise. Ein so durchdachter Studiengang für das Lehramt in Mathematik wird übrigens nicht automatisch leichter werden – hier liegt eine ähnliche Situation vor wie für einen von mir prognostizierten künftigen Mathematikunterricht! [26]

Ich schließe mit einem Zitat aus der Einleitung eines Sammelbandes von Biehler, Heymann und Winkelmann: [27]

> Fragen der Lehrerbildung gewinnen wieder an Bedeutung, und zwar innerhalb wie außerhalb der Hochschulen. Das hat zunächst handfeste äußere Gründe, ebenso wie das zwischenzeitliche Desinteresse an diesen Fragen während der achtziger Jahre. Vor dem Hintergrund der Sorgen einer ganzen Hochschulgeneration ausgebildeter Lehrerinnen und Lehrer, einen angemessenen Arbeitsplatz zu finden, schien es müßig, sich um inhaltliche Reformen zu bemühen. Die Lehrerausbildung spielte im Alltag der Hochschulen nur noch eine randständige Rolle. Studienseminare wurden mangels Bedarf aufgelöst. [...] In den letzten fünf Jahren hat sich die Situation an den Hochschulen, aber auch in den Studienseminaren, grundsätzlich gewandelt. Auf der einen Seite gibt es wieder volle und übervolle Hörsäle und Seminare; die Ausbildungskapazitäten sind dem neuen Ansturm weder personell noch von der sachlichen Ausstattung her gewachsen. Auf der anderen Seite sind die inhaltlichen Ansprüche und Erwartungen der Gesellschaft gegenüber dem Lehrerberuf – vor allem was die erwünschten pädagogischen Fähigkeiten angeht – seit den sechziger und siebziger Jahren merklich gestiegen. Beides zusammengenommen signalisiert dringlichen Reformbedarf. Die etablierte Ausbildungspraxis wird dabei zunehmend in Frage gestellt, und bei vielen Betroffenen ist ein spürbares Unbehagen gegenüber dem Status quo zu verzeichen:
>
> – Lehrerinnen und Lehrer sind im Nachhinein häufig unzufrieden mit der Ausbildung, die sie durchlaufen haben, sowohl mit der ersten wie auch mit der zweiten Phase. Sie fühlen sich auf viele Anforderungen ihres beruflichen Alltags nicht hinreichend vorbereitet.
>
> – Studierende sehen wenig Zusammenhang in dem, was sie lernen sollen: Der Berufsbezug wird ihnen oftmals weder in den fachlichen noch in den fachdidaktischen und pädagogischen Studienanteilen in erwünschtem Maße deutlich.
>
> – Diejenigen, die für Lehrerausbildung an Universität und Studienseminar verantwortlich sind, sind selbst unzufrieden. Zum einen erschweren die vorfindlichen institutionellen und materiellen Rahmenbedingungen die Realisieruing alternativer Ansätze in der Lehre. Zum anderen aber besteht Unsicherheit, in welche Richtung Reformschritte überhaupt gelenkt werden könnten. Es fehlen konzeptionelle Entwürfe, an denen sich eine Reform orientieren könnte.

Mein hier vorgestelltes Konzept will ein Beitrag zu solchen konzeptionellen Entwürfen sein. Dabei sei nochmals darauf hingewiesen, daß dieser nicht zu einer Niveausenkung der Lehrerausbildung führen würde – im Gegenteil!

7 Literaturhinweise

Biehler, Rolf & Heymann, Hans Werner & Winkelmann, Bernard (Hrsg.) [1995]: Mathematik allgemeinbildend unterrichten. Impulse für Lehrerbildung und Schule. IDM-Reihe „Untersuchungen zum Mathematikunterricht“, Bd. 21. Köln: Aulis.

Bruns, Martin & Förster, Frank & Herget, Wilfried & Hischer, Horst & Körner, Henning & Pruzina, Manfred & Winkelmann, Bernard & Wolff, Klaus P. [1994]: Stellungnahme zur Forderung des „Fakultätentags Informatik“, Informatik als obligatorisches Fach in der Sekundarstufe II einzurichten. In: [Hischer 1994 e, S. 162-164], (Auftragsarbeit für den Vorstand der GDM).

Buchberger, Bruno [1989]: Should Students Learn Integration Rules? Technical Report, RISC-LINZ Series no. 89-07.0. Johannes Kepler University, A-4040 Linz, Austria.

Devlin, Keith [1990]: Sternstunden der modernen Mathematik – Berühmte Probleme und neue Lösungen. Basel: Birkhäuser Verlag.

Hanisch, Günter [1992]. Die Auswirkungen der Computeralgebra auf den Mathematikunterricht. In [Hischer 1992, S. 14–20]. (Unter dem Titel „Der Mathematikunterricht zu Beginn des nächsten Jahrtausends“ auch in: *Mathematik in der Schule* **30**(1992)10, 513–521.

Heymann, Hans Werner [1995]: Zielsetzungen eines künftigen Mathematik- (und Informatik-?)unterrichts – Überlegungen aus bildungstheoretischer Sicht. In: [Hischer & Weiß 1995, S. 46–57].

Hischer, Horst [1988]. Allgemeinbildende Schulen und neue Informationstechnologien. In: Erziehungswissenschaft und Beruf, 8. Sonderheft (Tagungsband), S. 50–57, Rinteln, 1988. Abgedruckt auch in: Schulcomputerjahrbuch 1988 & 89. Stuttgart,1988.

Hischer, Horst [1989]: Neue Technologien in allgemeinbildenden Schulen – Ein Beitrag zur begrifflichen Klärung. In: *Schulverwaltungsblatt für Niedersachsen* **41**(1989)4, 94-98.

Hischer, Horst & v. Zimmermann, Thomas [1990]: Neue Technologien und Allgemeinbildung. In: *Computerbildung*, Heft 2, 4–7.

Hischer, Horst [1991]: Neue Technologien als Anlaß einer erneuten Standortbestimmung für den Mathematikunterricht (Hauptvortrag auf der 25. Bundestagung für Didaktik der Mathematik am 5.3.1991 in Osnabrück). In: *mathematica didactica* **14**(1991**)**1/2, 3–24.

Hischer, Horst (Hrsg.) [1992]. Mathematikunterricht im Umbruch? – Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung" von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 1991 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker,155 Seiten.

Hischer, Horst (Hrsg.) [1993]: Wieviel Termumformung braucht der Mensch? – Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden. Bericht über die 10. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 25. bis 27. September 1992 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

Hischer, Horst [1994 a]: Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (1): Entdeckung der Irrationalität am Pentagon – Ein Beispiel für den Sekundarbereich I. In: *Mathematik in der Schule* **32**(1994)4, 238–248.

Hischer, Horst [1994 b]: Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (2): Lösung klassicher Probleme mit Hilfe von Trisectrix und Quadratrix – Ein Beispiel für die gymnasiale Oberstufe. In: *Mathematik in der Schule* **32**(1994)5, 279–291.

Hischer, Horst [1994 c]: Mathematikunterricht und Computer – Ein Überblick. In: *Mathematik in der Schule* **32**(1994)6, 321–332.

Hischer, Horst [1994 d]: Mathematikunterricht und Computer – Perspektiven. In: *Mathematik in der Schule* 32(1994)7/8, 385–397.

Hischer, Horst (Hrsg.) [1994 e]: Mathematikunterricht und Computer – neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen? Bericht über die 11. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 8. bis 10. Oktober 1993 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

Hischer, Horst [1995 a]: Mathematikunterricht vor dem Hintergrund der Anforderungen, Herausforderungen und Möglichkeiten durch Informatik und Technologie – Werden sich Ziele, Inhalte und Methoden ändern (müssen)? In: Steiner, Hans-Georg & Vollrath, Hans-Joachim (Hrsg.): Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze. Tagungsband. Köln: Aulis.

Hischer, Horst [1995 b]: Zur Zielorientierung für einen künftigen Mathematikunterricht mit Blick auf die Lehrerausbildung. In: [Biehler et al. 1995, S. 16-28].

Hischer, Horst & Weiß, Michael (Hrsg.) [1995]: Fundamentale Ideen – Zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 23. bis 26. September 1994 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

Hischer, Horst (Hrsg.) [1997]: Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht?. Bericht über die 14. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 20. bis 23. September 1996 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

Huizinga, Johan [1997]: Homo Ludens. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt (bei Rowohlt erstmalig 1956 erschienen, Originalausgabe 1938).

Knechtel, Heiko [1995]: Neue Ziele und neue Inhalte des Mathematikunterrichts. Arbeitsgruppenbericht. In [Hischer & Weiß 1995, S. 98–101].

Ruprecht, Horst [1989]: Spiel-Räume fürs Leben – Musikerziehung in einer gefährdeten Welt. (Festvortrag auf der 7. Bundeschulmusikwoche Karslruhe 1988). In: Ehrenforth, Karl-Heinrich (Hrsg.): Kongreßbericht 7. Bundeschulmusikwoche Karlsruhe 1988. Mainz: Schott, S. 32-39.

Schupp, Hans [1991]: Der Computer als Herausforderung. Vortrag im Mathematikdidaktischen Kolloquium in Dortmund am 25. April 1991. Manuskript.

Winkelmann, Bernard [1992]: Zur Rolle des Rechnens in anwendungsorientierter Mathematik: Algebraische, numerische und geometrische (qualitative) Methoden und ihre jeweiligen Möglichkeiten und Grenzen. In: [Hischer 1992, S. 32–42].

Zimmerli, Walther Ch. [1989]: Der Mensch als Schöpfer seiner selbst – Realität und Utopie der Neuen Technologien. In: Kwiran, Manfred & Wiater, Werner: Schule im Bannkreis der Computertechnologie. Wuppertal: R. Brockhaus Verlag, S. 81–96.

8 Fußnoten

1 vgl. [Bruns et. al. 1994] und [Hischer 1994 c, d]

2 [Schupp 1991, S. 5]

3 zum „Kalkulieren“ vgl. [Hischer 1996]

4 vgl. [Hischer 1992]

5 Und so stellt sich ja auch die Frage, wer beim Schachspiel eines Menschen „gegen“ einen Computer eigentlich der „Gegner“ ist ...

6 [Schupp 1991]

7 Z. B. der Taschencomputer TI-92. Die folgende Abb. 2 wurde mit GEOLOG erstellt.

8 Programm GEOEXPERT von Gerhard Holland. Bonn: Dümmler Verlag, 1994.

9 [Devlin 1990, S. 173]

10 in [Behnke 1961, S.], Hervorhebung von mir

11 [Buchberger 1989]

12 TI-92 von Texas Instruments

13 [Buchberger 1989]

14 Das ist übrigens typisch für Technik: Die Geschichte der Technik ist nämlich zugleich eine Geschichte der „Auslagerung“ von mechanischen Fähigkeiten des Menschen auf Geräte und Maschinen. Als besondere Qualität liegt hier nun vor, daß erstmals solche Fähigkeiten auf Maschinen übertragen werden, die bisher den menschlichen Geistesleistungen vorbehalten schienen!

15 [Hischer 1991]

16 Vgl. [Zimmerli 1989, S. 84–85]; dort Hinweis auf Scheler, Max, 1926: Mensch und Geschichte. In: Ders.: Gesammelte Werke, Bd. 9, Bern/München 1976, S.120; Scheler hatte hier neben dem „homo faber“ vier weitere Menschenbilder unterschieden; Zimmerli differenziert in seinen Untersuchungen den *homo faber* schließlich aus zum „*homo faber sapiens ignoransque, omnipotens sed abstinens*“, also der „*Mensch als schaffendes, weises, jedoch unwissendes Wesen, allmächtig, aber zurückhaltend*“. Das ist natürlich normativ zu sehen.

17 [Zimmerli 1989, S. 95]

18 [Ruprecht 1989, S. 38-39]

19 [Huizinga 1997]

20 vgl. [Hischer 1995] und [Knechtel 1995]; diese Vorstellung von „Spiel“ ist übrigens das vorläufige Ergebnis eines Aushandlungsprozesses innerhalb eine Gruppe von Mathematikdidaktikern, bei der ich mitgewirkt habe.

21 vgl. [Hischer 1991, 1994c, 1995]

22 vgl. [Hischer 1991]

23 So sei hier exemplarisch der Katalog von Hans Werner Heymann zu fundamentalen Ideen der Mathematik genannt ([Heymann 1995]): *Idee der Zahl, des Messens, des funktionalen Zusammenhangs, des räumlichen Strukturierens, des Algorithmus, des mathematischen Modellierens*. Daneben bieten auch die Verfügbarkeit sowohl informationstechnischer Systeme als auch informatischer Methoden und Ideen auf sehr unterschiedlichen Ebenen Ansatzpunkte, solche allgemeinen Ziele eines künftigen Mathematikunterrichts zu entwickeln.

24 vgl. [Ausubel 1974, Bd. I, S. 140]

25 vgl. [Winkelmann 1992]

26 Hier könnte ggf. noch ein Zitat von Freudenthal aus dem Jahre 1973 ergänzt werden, ohne damit behaupten zu wollen, daß seine damalige Kritik heute noch zutreffend ist:

„[...] So macht es der Physiker, so macht es wohl auch jeder Mathematiker, wenn er derartige Probleme im stillen Kämmerlein angreift. So doziert der Physiker Physik, im Vollbewußtsein seines guten Rechts oder schuldbewußt, je nachdem, ob er die Mathematik souverän beherrscht oder von ihr frustriert wird. Unter den Mathematikern, die dazu imstande wären, Mathematik zu lehren, wie sie der Physiker anwendet, gibt es nur wenige, die es wünschenswert finden, daß der Student diese Mathematik kennen lernt, und noch weniger, die den Mut haben, sie ihm vorzusetzen. Auf das Gymnasium wird von der Universitätsmathemetik her ein starker Druck in abstrakter Richtung ausgeübt, der von der Analysis, wie sie angewandt wird, weggerichtet ist [...] Ich weiß, daß es Mathematiklehrern schwer fällt, etwas zu unterrichten, das nicht säuberlich nach Definition, Voraussetzung, Behauptung, Beweis gegliedert ist; wie man es dann doch macht, kann man vom Physiker lernen [...] Der Student sollte es denn auch beim Mathematiker lernen, damit er nicht in der Physik-Vorlesung mit offenem Mund dasitzen muß, und der Schüler sollte frühzeitig auf diese Methode vorbereitet werden. Es ist ein ganz unhaltbarer Zustand, wenn der Mathematiker eine nicht anwendbare Mathematik unterrichtet und der Physiker eine Mathematik anwendet, die vom Mathematiker nicht unterrichtet worden ist.“

27 [Biehler & Heymann & Winkelmann 1995, S. 7–8]