● Geometrieunterricht vor neuen Chancen?

Horst Hischer, Braunschweig

Geometrie spielt teilweise im Mathematikunterricht nur eine marginale Rolle – dann oft vor allem mit Blick auf die Möglichkeiten für Beweisübungen, ohne zugleich das *Problem des Weckens von Beweisbedürftigkeit für die Schülerinnen und Schüler* hinreichend zu beachten. Die Verfügbarkeit vielfältiger anspruchsvoller Geometriesoftware (z. B. Dynamische Geometriesysteme) ermöglicht hier nun eine Gewichtsverlagerung *weg vom* Akzentuieren auf das *Beweisen* und *hin zum* experimentellen *Entdecken* von Zusammenhängen *und* anschließenden *Begründen*. Die Verfügbarkeit von Deduktionssystemen (wie GEOEXPERT) vermag darüber hinaus den Blick zu öffnen für den bedeutsamen *Unterschied zwischen* einem *formallogischen Beweis* und dem *Finden einer Beweisidee*.

Aus dieser „Verfügbarkeit" folgt jedoch keineswegs das Erfordernis zum ständigen Einsatz entsprechender Software beim Unterstützen der Tätigkeiten des *Entdeckens* bzw. des *Beweisens*. Vielmehr kann bereits ein *gelegentlicher Einsatz* geeignet sein, bei den Schülerinnen und Schülern andere Sichtweisen im o. g. Sinne entstehen zu lassen und damit bei Ihnen auch „händische" Aktivitäten anders zu verinnerlichen. Insgesamt ergeben sich also möglicherweise dadurch für den Geometrieunterricht neue Chancen. Zugleich wird eine Schülerorientierung im Sinne offeneren Unterrichts erleichtert.

1 Vorbemerkung

In der Forschungstätigkeit des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" hat sich seit seiner Gründung im Jahre 1978 etwas ganz Erstaunliches vollzogen: Ging es ursprünglich darum, über *erkennbare Auswirkungen der Informatik auf den Mathematikunterricht* nachzudenken, so sind mittlerweile der Computer und die Informatik ein *Anlaß* geworden, über *grundsätzliche Zielsetzungen des Mathematikunterrichts* nachzudenken. Und nachdem in den letzten Jahren Computeralgebrasysteme in ihrer Bedeutung vor allem für den *Algebraunterricht* und den Analysisunterricht im Blickpunkt der Arbeit standen, ist es nur folgerichtig, jetzt den *Geometrieunterricht* in den Blick zu nehmen, weil einerseits neuartige, sehr leistungsfähige Geometriesoftware existiert und andererseits die Geometrie im Mathematikunterricht teilweise nur eine marginale Rolle spielt.

2 Computer und Geometrieunterricht — Leitgedanken zur Tagung

So geht es hier um „Computer und Geometrieunterricht" – und zwar in dieser Reihenfolge, und das heißt: den Computer als einen wichtigen *Anlaß* zu sehen, über *Zielsetzungen* eines künftigen Geometrieunterrichts nachzudenken! So finden sich in den „Leitgedanken" zur Herbsttagung 1996 dieses Arbeitskreises fünf Aspekte, die der Programmkommission bei der Tagungsvorbereitung bedenkenswert erschienen. Sie seien hier in Frageform in Erinnerung gerufen:

(1) Welche Möglichkeiten gibt es zum *Computereinsatz im Geometrieunterricht*, und was müssen wir dabei beachten?

Hier geht es also zunächst um Fragen der Unterrichts*methodik*, und viele Beiträge dieses Tagungsbandes gehen auf diese Frage ein.

Es gehören aber auch lernpsychologische und soziologische Aspekte dazu. In diesem Sinne fragte bereits 1984 Hartmut v. Hentig: [1]

- ∗ Was bedeutet das Eindringen der Computer in die Schule für Schüler und Lehrer, für ihr Denken und Handeln?
- ∗ Welche Folgen für das Lernen und Lehren sind zu erwarten?
- ∗ Was können die Verantwortlichen tun?

Und Heinrich Bauersfeld ergänzte 1985: [2]

> Wir haben gegenwärtig viele Forschungsergebnisse zu den Anpassungsproblemen des Menschen an den Computer. Wir wissen sehr viel von den Schwierigkeiten des Programmieren-Lernens, aber fast nichts von den humanen Folgen für Sprache, Vorstellung und Denken.

Wenngleich diese Aspekte von Bauersfeld und Hentig nicht zentraler Gegenstand der Herbsttagung 1996 waren, so sind sie jedoch stets mitzu(be)denken.

---

1 Zitiert in [Bauersfeld 1984, S. 2]

2 [Bauersfeld 1985, S. 13]

(2) Ändert sich aufgrund der Verfügbarkeit informatischer Systeme womöglich unser *Verständnis von* und unsere *Einsicht in „Geometrie“*?

Diese Frage betrifft die klassische *Sachanalyse*, also den Unterrichts*gegenstand*. Auch sie wird von einigen Beiträgen dieses Bandes aufgegriffen, und so entsteht die Frage: *Was ist eigentlich Geometrie?* Als mich ein Teilnehmer vor der Tagung fragte, ob der von ihm vorgesehene Beitrag denn überhaupt den Geometrieunterricht beträfe, antwortete ich ihm, was denn Geometrie sei, müßten wir letztlich selbst festlegen. Und so wird ja auch in dem klassischen Buch von Courant & Robbins: „Was ist Mathematik?“ nirgends explizit definiert, was denn Mathematik sei, sondern Mathematik wird implizit durch Beschreibung mathematischen Tuns erklärt. Und dieses ist den Zeitläuften unterworfen. So ist nicht auszuschließen, daß sich unser Verständnis von Geometrie aufgrund der Verfügbarkeit des Computers ändert, ohne daß wir zugleich explizit sagen können, was denn Geometrie sei.

Dennoch sei an die aspektreiche Charakterisierung der Geometrie von Holland erinnert, die womöglich weiterhin gültig ist, ggf. zu erweitern ist: [3]

- Geometrie als *Lehre vom Anschauungsraum*,
- Geometrie als *Beispiel einer deduktiven Theorie*,
- Geometrie als *Übungsfeld für Problemlösen*,
- Geometrie als *Vorrat mathematischer Strukturen*.

Bei Behnke findet sich in seinen *Grundzügen der Mathematik* von 1960 nur der letzte Aspekt: [4]

> Eine Geometrie ist logisch ein System von Dingen und Relationen. Die Dinge können (anschaulich) sein: Punkte, Geraden, Kreise, Winkel, Abstände usw. Die Relationen können einstellig sein (X ist ein Punkt) oder zweistellig (X inzidiert mit Y) oder dreistellig (Y liegt zwischen X und Z) oder vierstellig (X und Y haben denselben Abstand wie Z und U) usw.
>
> Zu einer Geometrie gehört eine Gruppe, ihre Automorphismengruppe, d. h. die Gesamtheit aller Abbildungen des Dingbereichs der Geometrie auf sich, bei denen alle Relationen erhalten bleiben [...]

[3] [Holland 1996, S. 7]

[4] [Behnke et. al. 1960, S. 23]

Wenngleich damit keinesfalls explizit klar wird, was denn Geometrie nun sei, so fällt – u. a. bei der Betrachtung vieler Schulbücher – auf, daß uns die mengen- und strukturtheoretisch geprägte Sprechweise Behnkes vielfach offenbar ohne Not abhanden gekommen ist. [5]

Die nächsten drei Fragen in den *Leitgedanken* beziehen sich auf den Bildungswert, nämlich:

(3) *Welche Ziele und Inhalte* des bisherigen Geometrieunterrichts können *möglicherweise nicht mehr aufrechterhalten werden*?

(4) *Welche Ziele und Inhalte* bleiben dagegen *unverzichtbar*?

(5) *Welche Ziele und Inhalte* könnten oder sollten gar möglicherweise *neu hinzukommen*?

Aber stehen *Ziele* nicht in Widerspruch zu offenen, problemorientierten, entdeckenden Unterrichtsformen?

Dieses pädagogisch brisante Feld sei hier nur knapp mit zwei Zitaten umrissen. [6] Das erste stammt von dem amerikanischen Militärpsychologen Robert Mager, auf den bekanntlich das Konzept der *operationalisierten Lernziele* maßgeblich zurückgeht. Er hatte dieses – gemeinsam mit anderen Militärpsychologen – für Zwecke der optimalen Ausbildung von Panzerbesatzungen entwickelt. Als dann im amerikanischen Militär die große Entlassungswelle begann, wählte Mager mit einigen Kollegen die Pädagogische Psychologie als neuen Wirkungskreis. So stellte er 1965 in seinem bekannten Buch „Lernziele und Programmierter Unterricht“ folgendes Motto an den Anfang:

- Wer nicht weiß, wohin er will, braucht sich nicht zu wundern, wenn er ganz woanders ankommt.

Oliver Cromwell (1599 – 1658) dagegen wird folgender Ausspruch nachgesagt, der also rund 350 Jahre alt ist:

- Ein Mann kommt am weitesten, wenn er nicht weiß, wohin er geht.

Diese beiden Zitate verdeutlichen überzeichnend den Unterschied zwischen lernzielorientiertem und offenem Unterricht. Anzustreben ist dagegen wohl eher ein Unterricht, der

[5] Ich vermag übrigens bis heute nicht zu verstehen, wie das Machtwort einiger Kultusminister solche Auswirkungen auf Wissenschaft und Unterricht haben konnte und kann.

[6] Ich verdanke diese Hinweise dem früheren Fachleiter für Deutsch am Studienseminar Braunschweig II für das Lehramt an Gymnasien, Herrn StD a. D. Dr. Günter Jahn.

gemäß Hilbert Meyer von den Beteiligten *gemeinsam inszeniert* wird, und zwar durch eine Ausgewogenheit zwischen einer *Orientierung an Bildungszielen einerseits* und *Offenheit im Sinne von Schülerorientierung andererseits*.

Für unser eigenes didaktisches Tun ergibt sich daraus die Mahnung, daß wir nicht losgelöst von den Betroffenen, nämlich den Schülerinnen und Schülern, über Ziele, Inhalte und Methoden des Geometrieunterrichts nachdenken sollten, sondern uns vielmehr den Weg unserer Bemühungen stets von diesen weisen lassen sollten: Offenheit!

3 „Mathematikunterricht in der Krise“ — durch den Computer?

In der Diskussion dieses Arbeitskreises wird seit 1991 immer wieder die Frage aufgegriffen, ob denn der Mathematikunterricht durch das Auftreten des Computers in eine „Sinnkrise“ geraten sei. Berücksichtigt man, daß „Krisis“ im Griechischen und Lateinischen eine *entscheidende Wendung* bezeichnet, die entweder zum Guten oder zum Schlimmen verlaufen kann (während ja eine Katastrophe stets eine unglückliche Wendung ist), so würde sich ein „Mathematikunterricht in der Krise“ zunächst *lediglich im Umbruch* befinden – also durchaus mit Chancen zu einer positiven Entwicklung. Insofern ist der Frage nachzugehen, ob sich insbesondere für den teilweise im Schulalltag faktisch marginal gewordenen Geometrieunterricht durch die Verfügbarkeit des Computers neue Chancen ergeben! Dies ist zugleich der Tenor vieler Beiträge dieses Tagungsbandes, und ich möchte mit einigen persönlichen Schlaglichtern ergänzend den Blick auf solche Fragen lenken.

Der Computer ist zwar ein Produkt der heutigen Informatik, stellt letztlich jedoch eine Materialisierung mathematischer Ideen dar, welche bis auf Leibniz zurückgehen. Er wird zunehmend in den Geisteswissenschaften angewendet, aber – wen sollte es wundern – er hat sich mittlerweile zu einem bedeutsamen Werkzeug *auch* innerhalb der Mathematik als Wissenschaft entwickelt: in den 70er Jahren zunächst bei den Numerikern, in den frühen 80er Jahren dann bei den Zahlentheoretikern und Algebraikern, ab Mitte der 80er Jahre bei den Vertretern der Analysis und Stochastik und heute in allen Bereichen. [7]

[7] nach [Schupp 1991]

Der Computer ist damit über die Informatik nicht nur ein Sprößling der Mathematik, sondern er wirkt auch auf sie selbst zurück. Und zwar entwickelt er sich zunehmend zu einem Werkzeug neuer Qualität, indem er den Menschen bei geistigen Tätigkeiten unterstützt bzw. ihn sogar davon entlastet. Er wird deshalb auch vielfach als „Denkzeug“ bezeichnet.

Folgende „Tätigkeiten“ des Mathematikers, die von diesem „Denkzeug“ unterstützt bzw. gar übernommen werden können, erscheinen mir dabei im bildungstheoretischen Kontext besonders wichtig:

- *Entdecken*, *Beweisen* und *Kalkulieren*

Es handelt sich hierbei um wesentliche mathematische Aktivitäten, die auch für den Mathematikunterricht bedeutsam, ja geradezu konstitutiv sind. [8] Und in allen drei Bereichen spielt der *Computer als Werkzeug* eine zunehmend wichtigere Rolle. Weil es sich hierbei um *humane* Qualifikationen handelt, habe ich bereits früher die Rolle des Computers hierbei ganz bewußt anthropomorphisierend dargestellt: nämlich als *„Entdecker“* und als *„Beweiser“*; statt *„Kalkulierer“* hatte ich jedoch aus gutem Grunde die Bezeichnung *„Trivialisierer“* gewählt. [9] Der Aspekt des Kalkulierers bzw. Trivialisierers spielte im letzten Tagungsband die wesentliche Rolle, während im vorliegenden Kontext einige Bemerkungen zum *Entdecker* und *Beweiser* angebracht sind.

Dabei ist klar, daß nicht das Werkzeug selbst „entdeckt“, sondern vielmehr der Mensch mit Hilfe dieses Werkzeugs. Und entsprechend „trivialisiert“ nicht der Computer, sondern ursächlich der Mensch durch die von ihm erdachten und dem Computer implantierten Algorithmen. Jedoch ist diese überzeichnende Anthropomorphisierung Absicht, indem die Rolle dieses neuartigen „Helferleins“ betont wird. [10]

4 Computer als Werkzeug: *Entdecken* und *Beweisen*

Die folgende Graphik (Abb. 1) zierte das Programmheft der Tagung, sie wurde mit einem Dynamischen Geometriesystem (DGS; hier: EUKLID) erzeugt:

[8] zum „Kalkulieren“ vgl. [Hischer 1996]

[9] vgl. [Hischer 1992]

[10] Und so stellt sich ja auch die Frage, wer beim Schachspiel eines Menschen „gegen“ einen Computer eigentlich der „Gegner“ ist ...

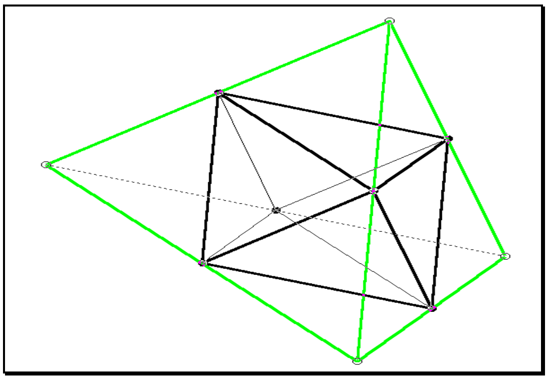

Abb. 1

Es wird ein frei gewähltes Viereck mit beiden Diagonalen „gezeichnet“, und dann läßt sich diese zweidimensionale Figur dreidimensional als *Tetraeder* deuten. Ferner erkennt man sofort ein *Oktaeder*, das aus den Seitenmitten dieses Tetraeders entsteht, und bei *Variation* des Tetraeders im *Zugmodus* springt ins Auge, daß gegenüberliegende Seiten des Oktaeders offenbar stets parallel und gleichlang sind.

Der *Computer* tritt uns hier *als Werkzeug* gegenüber, das dem *Entdecken* von Zusammenhängen *dient*. Und tatsächlich bildet der Computer für die mathematische Forschung mit seinen Möglichkeiten zum „*Erzeugen, Unterstützen und Falsifizieren von Vermutungen*“, wie Schupp es nannte, [11] ein neuartiges Werkzeug, und zwar für eine *experimentelle Mathematik*, die es in dieser Form früher nicht gab. So gibt es zunehmend an Universitäten bereits Institute für Experimentelle Mathematik – neue Arbeitsweisen entstehen, die durch *heuristische Vorgehensweisen* charakterisiert sind, indem mit Hilfe dieses Werkzeugs mathematische Zusammenhänge experimentell entdeckt oder verworfen werden. Dazu aus der Schulmathematik ein

Beispiel: *Peripheriewinkelsatz*

Wir benutzen ein DGS, das uns sogar auf einem modernen Taschencomputer zur Verfügung steht: [12] Auf einem Kreis werden variable Punkte markiert, und mit diesen und dem Kreismittelpunkt werden in üblicher Weise zwei Dreiecke über einer Sehne gebildet. Zusätzlich lassen sich die Maßzahlen des Zentriewinkels und des Peripheriewinkels in gewünschter Genauigkeit einblenden. Die gesamte Konstruktion ist von den Schülerinnen und Schülern mit Hilfe eines solchen Werkzeugs selbst durchführbar (Abb. 2).

Wenn nun einer der drei Punkte auf dem Kreis im sog. *Zugmodus* bewegt wird, so werden auch die Dreiecke verformt, und die jeweils zugehörigen Winkelmaße werden angezeigt. Damit wird der Peripheriewinkelsatz „entdeckt“.

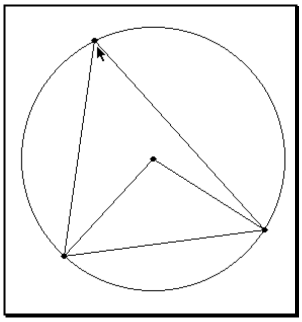

Abb. 2

Diese eigentätige Zugangsweise ist – so meine Hypothese – von ungleich anderer Qualität als die klassische Erarbeitungsweise, bei der in der Lerngruppe arbeitsteilig vorgegangen wird und dann die Ergebnisse verglichen und zusammengetragen werden. Dagegen bei Verwendung eines solchen Geometrieprogramms kann jede Schülerin und jeder Schüler die subjektive Wahrnehmung haben, selbst „beliebig viele Fälle“ durchspielen zu können. Damit wird aber möglicherweise der „Beweis“ für die Schülerinnen und Schüler eine deutlich andere Qualität bekommen können:

Während ein „Beweis“ in der Wissenschaft Mathematik nicht nur dem Verstehen von Zusammenhängen dient, sondern methodologisch *vor allem* **das** *Instrument der Erkenntnissicherung* (unter logischen Aspekten) ist, wird seine Rolle (unter psychologischen Aspekten) wohl spätestens jetzt im Mathematikunterricht möglicherweise anders zu bewerten sein: Für die Schülerinnen und Schüler wird – so meine Hypothese – in einem solchen Fall die experimentell gewonnene Erkenntnis nicht nur Vermutung, sondern bereits Gewißheit sein – so, wie ein empirisch arbeitender Naturwissenschaftler die Gültigkeit eines Effekts durch endlich viele Versuche nachweist, die durch Fachkollegen reproduzierbar sein müssen. Es sei dahingestellt, ob wir hier vielleicht Zeugen eines Wandels sind, der uns wegführt von einer mehr „idealisierten Mathematik“ hin zu einer mehr „materialisierten Mathematik“!

Unabhängig davon gilt: Das alte mathematikdidaktische Problem des *Weckens von Beweisbedürftigkeit* wird durch diese neuen Werkzeuge nicht nur nicht ausgeräumt, sondern es verschärft sich wohl!

Um so mehr kann das Beweisen (endlich!) eine neue Rolle bekommen, zugleich auch eine neue Chance in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler: Das Experimentieren offenbart zwar den Fakt, aber es erklärt nicht – d. h. die *Frage, warum das*

[11] [Schupp 1991]

[12] Z. B. der Taschencomputer TI-92. Die folgende Abb. 2 wurde mit GEOLOG erstellt.

denn so ist, wird durch das Experiment überhaupt nicht beantwortet. Und hier bedarf es nun einer Analyse der Zusammenhänge, verbunden mit Argumentieren, Begründen und ggf. Widerlegen. Der „Beweis“ dieses Sachverhalts kann damit dann im Mathematikunterricht zwar einen Beitrag zum *Verstehen der Zusammenhänge* leisten, nicht aber mehr – in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler! – *zum Sichern der Erkenntnis*, wie oftmals unterstellt wird (zumindest in der Argumentation vieler Lehrkräfte gegenüber ihren Schülerinnen und Schülern zwecks Rechtfertigung solcher Beweise!).

Daher wird es vielleicht auch künftig ratsam sein, den *begründenden Aspekt eines Beweises* deutlich zu machen und ihn hervorzuheben gegenüber dem *wahrheitssichernden Aspekte eines Beweises* – vielleicht sogar: von einer *„Begründung“* zu sprechen, nicht aber von einem *„Beweis“*. Und das könnte dann *zu einer neuen „Unterrichtskultur“* führen, etwa

weg vom:

- *„Beweise, daß das ... gilt!“*

und hin zum:

- *„Kannst Du begründen, warum das gilt?“*

Der Computer als Instrument der Erkenntnisgewinnung macht somit das Beweisen keinesfalls überflüssig, kann diesem Prozeß jedoch unterrichtsmethodisch und erkenntnistheoretisch eine andere Qualität verleihen.

Diverse weitere Beispiele können das ebenso demonstrieren, wobei geometrische Beispiele mit Invarianten hier besonders beeindrucken, etwa der Satz des Thales, der Schwerpunkt und der Fermatpunkt eines Dreiecks. Es sei noch ein weiteres Beispiel angeschlossen, das sich auf geometrische Invarianten bezieht.

Beispiel: *Seitenmittenvieleck*

Bildet man zu einem beliebigen Viereck das *Seitenmittenviereck*, so stellt man bekanntlich überrascht fest, daß dieses offenbar immer ein Parallelogramm ist (Abb. 3) – auch bei „übergeschlagenem“ Ausgangsviereck (Abb. 4)! Dies mag dann Anlaß zu geometrischen Reflexionen werden, weshalb das denn wohl so ist.

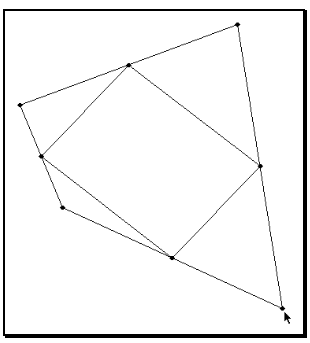

Abb. 3

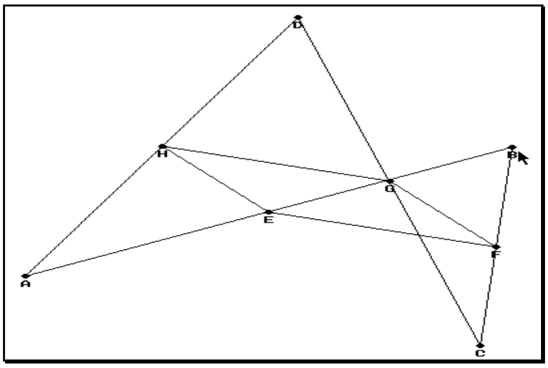

Abb. 4

Eine analoge Betrachtung bei Dreiecken liefert ein *Seitenmittendreieck*, das stets ähnlich zum Ausgangsdreieck ist, und das kann dann ein Auftakt zum Strahlensatz sein oder sich als Konsequenz aus diesem ergeben.

Und wie sieht es aus, wenn man entsprechende Untersuchungen beim Fünfeck durchführt?

Zunächst ergibt sich im Experiment als überraschendes „Ergebnis“: Das *Seitenmittenfünfeck* ist „immer“ konvex (Abb. 5).

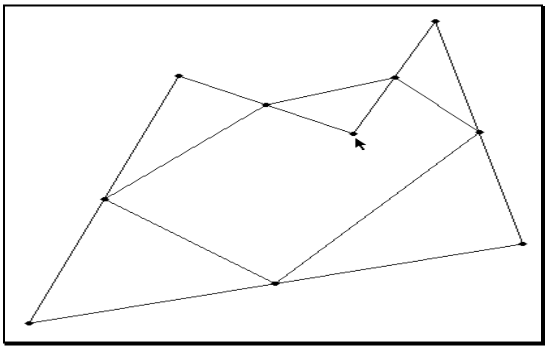

Abb. 5

Erst sorgfältigere, d. h. vielseitigere Experimente führen zu der Einsicht, daß diese erste „Erkenntnis“ falsch war (Abb. 6).

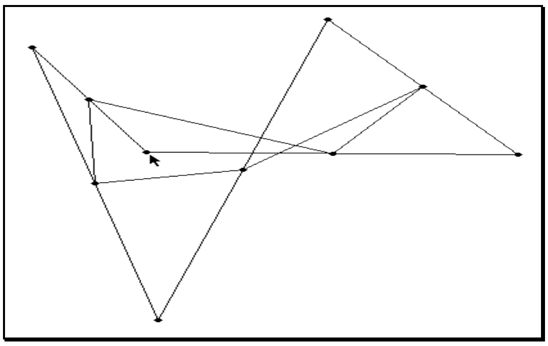

Abb. 6

Damit leistet das Experimentieren mit dem „Entdecker“ bei kluger Anwendung zugleich auch eine Einsicht in die Möglichkeiten und Grenzen der Verwendung eines solchen Werkzeugs, und zum *Begründen* gesellt sich das *Widerlegen*.

Das „Beweisen“ als wichtige mathematische Aktivität bekommt aber durch den Computer nicht nur im Mathematikunterricht eine neue Qualität, sondern z. T. auch in der Wissenschaft Mathematik: So ist das automatische Beweisen von mathematischen Theoremen, von dem schon Leibniz träumte, heute Realität geworden. Und zwar wird dieses von sog. Deduktionssystemen geleistet, die zur „Künstlichen Intelligenz“ gehören.

Dazu ein Beispiel mit dem Beweisprogramm GEOEXPERT, das eigens für den Geometrieunterricht entwickelt wurde und auf einem kleinen Expertensystem basiert. [13]

Beispiel: *Kongruenzbeweis*

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit gleichlangen Schenkeln AC und BC, ferner seien die Teilstrecken AD und BE gleichlang. Es liegt dann die Behauptung nahe, daß auch die Sehnen DC und EC gleichlang sind (Abb. 7).

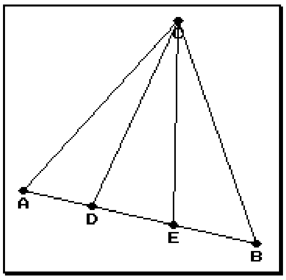

Abb. 7

Diese beiden Voraussetzungen und die Behauptung werden dem Expertensystem als Wissen bzw. als Behauptung „mitgeteilt“ und von diesem als *Knoten* in einem zweidimensionalen Netz veranschaulicht (Abb. 8). Das Expertensystem verfügt nun intern bereits über „Schlußregeln“ und ein „Grundwissen“ an Axiomen und Theoremen und versucht, aus diesem Vorrat weitere Aussagen als neue Knoten so auszuwählen, daß zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung ein Netz mit diesen Knoten *interpoliert* werden kann.

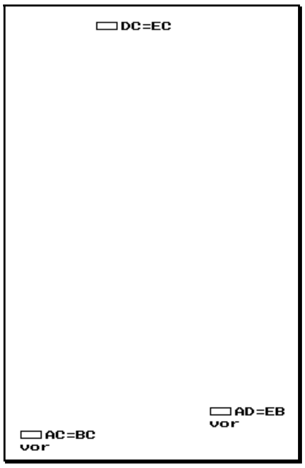

Abb. 8

Dieses Netz wird von dem Programm schrittweise interpoliert und stellt die logische Verknüpfung der einzelnen Beweisschritte und damit dann den Beweis dar (Abb. 9 bis 12).

[13] Programm GEOEXPERT von Gerhard Holland. Bonn: Dümmler Verlag, 1994.

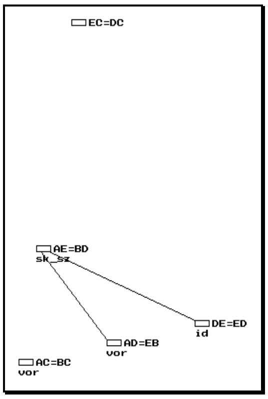

Abb. 9

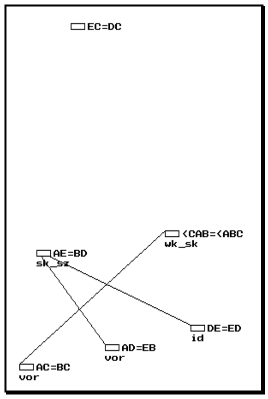

Abb. 10

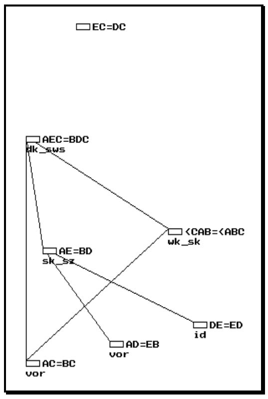

Abb. 11

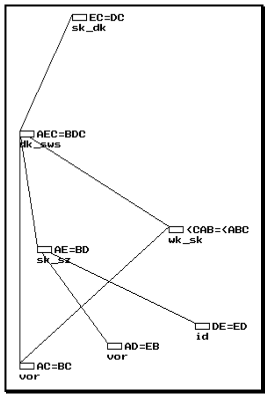

Abb. 12

Hieran sehen wir, wie solche „Beweiser“ prinzipiell funktionieren. Ferner ist auch offenkundig, daß sie zu einem Verständnis im Sinne einer „Begründung“ beitragen können, insbesondere bei Vorliegen dieser zweidimensionalen Veranschaulichung, denn man kann jetzt „verstehen“, warum der behauptete Sachverhalt gilt, auch wenn man selbst vielleicht nicht auf einen solchen Beweis gekommen ist.

Jedoch wird auch die *Beschränktheit solcher „Beweiser“* deutlich: Ein „Beweis“ im Sinne einer Lösung eines *Interpolationsproblems* kann von einem „Beweiser“ nur dann gefunden werden, wenn er lediglich mit Hilfe des ihm zu dem Zeitpunkt „bekannten“ Vorrats an Axiomen und Theoremen führbar ist. Ein Mensch als „Beweiser“ dagegen wird ggf. die spontane Idee entwickeln können, einen ganz neuen Aspekt zum Beweis heranzuziehen, um dadurch erst das Problem lösen zu können.

Andererseits tritt der Computer in der Mathematik noch ganz andersartig als „Beweiser“ auf, wie wir erstmals beim „Beweis“ des Vierfarbensatzes vor wenigen Jahren erleben mußten. Dazu ein Zitat aus dem Buch „Sternstunden der modernen Mathematik“ aus dem Jahre 1990: [14]

[14] [Devlin 1990, S. 173]

Der erforderliche Rechenaufwand war so groß, daß kein Mathematiker je hoffen konnte, alle Schritte per Hand zu überprüfen. Damit hatte sich der Begriff eines „mathematischen Beweises“ plötzlich von Grund auf gewandelt. Eine Befürchtung, die seit dem Aufkommen der ersten elektronischen Computer in den fünfziger Jahren bestanden hatte, war schließlich Wirklichkeit geworden: Der Computer hatte den Mathematiker bei einem Teil der Konstruktion eines echten mathematischen Beweises abgelöst.

5 Resümee

Der Computer wird somit in seinen neuen Rollen als „Entdecker“ (d. h. genauer: als hilfreiches *Werkzeug beim Entdecken von* Zusammenhängen) und als *„Beweiser“* zunehmend bedeutsam für die Mathematik. Ein künftiger Mathematikunterricht wird solche Aspekte den Schülerinnen und Schülern nicht vorenthalten dürfen, ihnen dazu aber notwendigerweise auch eigene Erfahrungen ermöglichen müssen. Ein Unterricht, der den Aspekt des „Entdeckers“ aufgreift, wird auch die Möglichkeiten und Grenzen der Erkenntnisgewinnung mittels solcher Werkzeuge zu reflektieren haben, um allgemeinbildenden Ansprüchen genügen zu können.

In geeigneter Weise muß ihnen aber auch vermittelt werden, daß ein mit sog. „künstlicher Intelligenz“ ausgestatteter Computer darüber hinaus als „Beweiser“ benutzt werden kann, und zwar für formallogische Beweise. Daß dafür prinzipiell geeignete Software existiert, haben wir gesehen. Dies mag helfen, den Blick zu öffnen für den Unterschied zwischen dem *formallogischen Beweisen* und dem (*kreativen*!) *Finden einer Beweisidee*, jedoch sollte auch das *zeitaufwendige Überprüfen* von Fallunterscheidungen mit Hilfe des Computers, wie etwa beim Vierfarbensatz, als neue Form des „Beweisens“, wohl aber weniger des „Verstehens“, erkannt werden.

Die folgenden Tagungsbeiträge zeigen die Vielschichtigkeit der Probleme und Möglichkeiten eines künftigen Geometrieunterrichts im Spiegel des allseits verfügbaren Computers sehr vielfältig auf.

Aus dieser „Verfügbarkeit“ des Computers folgt jedoch keineswegs das Erfordernis zum ständigen Einsatz entsprechender Software beim Unterstützen der Tätigkeiten des *Entdeckens* bzw. des *Beweisens*. Vielmehr kann bereits ein *gelegentlicher Einsatz* geeignet sein, bei den Schülerinnen und Schülern andere Sichtweisen im o. g. Sinne entstehen zu lassen. Konkret heißt dies:

Die (gelegentliche und dann wohl eindrucksvolle) Erfahrung gemacht zu haben, *mit Hilfe des Computers als Werkzeug* …

… *Zusammenhänge entdecken zu können*, jedoch damit noch lange nicht zu wissen, warum der entdeckte Zusammenhang gilt, bzw. aufgrund eines solchen Experiments zu voreiligen Schlüssen gekommen zu sein, kann bewirken, in klassischen, „händischen“ Situationen differenzierter vorzugehen;

… zuvor entdeckte oder behauptete *Zusammenhänge beweisen zu können* (sei es nun mit Hilfe eines Deduktionssystems oder durch Bearbeitung aufwendiger Fallunterscheidungen), kann u. a. einen Beitrag dazu liefern, zu verstehen, was einen Beweis vom Finden einer Beweisidee unterscheidet.

Insgesamt scheint also der *Geometrieunterricht* aufgrund der „Verfügbarkeit“ des Computers *vor neuen Chancen* zu stehen. Zugleich wird eine Schülerorientierung im Sinne offeneren Unterrichts erleichtert.

6 Literatur

Bauersfeld, Heinrich [1984]: Computer und Schule – Fragen zur humanen Dimension. IDM, Occasional Paper 56, November 1984. Bielefeld: Universität Bielefeld.

Bauersfeld, Heinrich [1984]: Die Besonderheit der Computererfahrungen. IDM, Occasional Paper 60, Januar 1985. Bielefeld: Universität Bielefeld.

Behnke, Heinrich et. al. (Hrsg.) [1960]: Grundzüge der Mathematik – für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft. Band II: Geometrie. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Devlin, Keith [1990]: Sternstunden der modernen Mathematik – Berühmte Probleme und neue Lösungen. Basel: Birkhäuser Verlag

Hischer, Horst [1992]: Mathematikunterricht im Umbruch? In: Hischer, H. (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? – Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung“ von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software (Tagungsband). Hildesheim: Franzbecker, S. 8–12.

Hischer, Horst [1996]: Begriffs-Bilden und Kalkulieren vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. In: Hischer, H. & Weiß, M. (Hrsg.): Rechenfertigkeit und Begriffsbildung (Tagungsband). Hildesheim: Franzbecker, S. 8–19.

Holland, Gerhard [1996]: Geometrie in der Sekundarstufe – Didaktische und methodische Fragen. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 2. Auflage.

Schupp, Hans [1991]: Der Computer als Herausforderung. Vortrag im mathematikdidaktischen Kolloquium in Dortmund am 25. April 1991. Unveröffentlichtes Manuskript.