Brauchen wir neue Ziele und Inhalte eines künftigen Mathematikunterrichts im Zusammenhang mit der Akzentuierung „fundamentaler Ideen“?

Horst Hischer, Braunschweig

Der lernzielorientierte Unterricht wird angesichts einer notwendigen Schülerorientierung und erforderlicher flexibler Unterrichtsgestaltung hoffentlich auch amtlich bald zu Grabe getragen, gleichwohl werden auch weiterhin *Unterrichtsziele* benötigt, die eine Orientierung pädagogischen Handelns ermöglichen. Fundamentale Ideen einer Disziplin können hilfreich sein, um solche Ziele eines Unterrichtsfachs diskursiv zu formulieren. Die Verfügbarkeit sowohl informationstechnischer Systeme als auch informatischer Methoden und Ideen bietet auf sehr unterschiedlichen Ebenen *Ansatzpunkte*, derartige Ziele im Wechselspiel mit fundamentalen Ideen zu entwickeln.

1 Vorbemerkung

Die Bildungsreform der frühen siebziger Jahre bescherte uns aus einem übertriebenen Objektivitätsanspruch heraus in Verbindung mit dem Konzept der „Wissenschaftsorientierung“ den sog. „lernzielorientierten Unterricht“, der bis heute noch immer Lehrpläne, Richtlinien und den Sprachgebrauch in fachdidaktischen Publikationen dominiert. Dabei hat die Allgemeine Pädagogik längst Abschied von diesem Konzept genommen, aber es gilt wohl tatsächlich das von Günter Hanisch 1991 hier in Wolfenbüttel so genannte „didaktische Trägheitsprinzip“.

Ohne diesen Aspekt hier weiter zu vertiefen, möchte ich die Hoffnung aussprechen, daß der „lernzielorientierte Unterricht“ angesichts eines gebotenen emanzipatorischen Unterrichtskonzepts – und damit einhergehend: einer dringend notwendigen Schülerorientierung und erforderlicher flexibler Unterrichtsgestaltung – hoffentlich auch amtlich bald zu Grabe getragen wird. Gleichwohl werden wir aber auch weiterhin *Unterrichtsziele* benötigen, die eine Orientierung pädagogischen Handelns ermöglichen, die jedoch nicht im Sinne einer Operationalisierung, also eines kleinschrittigen abprüfbaren Endverhaltens formuliert sind, sondern die vielmehr bewußt einem offenen, schülerorientierten Unterricht dienen.

Anerkannte Unterrichtskonzepte wie etwa „entdeckendes Lernen“ oder „problemorientierter Zugang“ sind auch gar nicht lernzielorientiert denkbar, denn sonst wäre es ja nur noch „nachvollziehendes Lernen“.

Dieses vorausgeschickt, wollen wir nun in dieser Arbeitsgruppe über neue Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts nachdenken und uns dabei im Sinne unseres Tagungsthemas vom Konzept „fundamentaler Ideen“ begleiten lassen. Denn ich denke, daß dieses – zugegebenermaßen zunächst vage Konzept – hilfreich sein kann bei der Entwicklung solcher Ziele.

Um über neue Ziele und Inhalte eines *künftigen* Mathematikunterrichts reflektieren zu können, bedarf es sicherlich zweierlei:

- Die *bisherigen* Ziele sind bewußt zu machen, wobei man hier unterscheiden wird zwischen solchen, die erreichbar waren bzw. sind und solchen, die nur eingefordert wurden, im wesentlichen jedoch stets nur Programm waren und sind („Lehrplanlyrik“).
- Und danach wird man Gründe dafür darzulegen haben, weshalb denn welche dieser Ziele entbehrlich sein werden – dies ist das Thema einer anderen Arbeitsgruppe – und welche neuen Ziele denn in den Katalog aufzunehmen seien – und dieser Aufgabe wollen wir uns widmen, wenngleich wir sie wohl auch während dieser Tagung kaum lösen werden, sondern nur „andenken“ können.

Die im ersten Punkt genannte Bestandsaufnahme können wir hier nicht leisten. Wir werden jedoch hier jeder für uns die Zielsetzungen und Inhaltskataloge der Lehrpläne und Richtlinien der einzelnen Kultusverwaltungen mitdenken, ferner ggf. auch einschlägige Publikationen von Fachdidaktikern und Pädagogen (vgl. etwa die Hinweise von [Herget 1994] auf Winter 1975, Bigalke 1976, Tietze/Klika/Wolpers 1982 und Weigand 1993).

Auf der Basis dieses „Vorwissens“ haben wir alle womöglich Ahnungen, Vorstellungen oder gar Konzepte, welche Ziele und Inhalte wir für entbehrlich halten bzw. welche neuen Ziele und Inhalte wir uns für einen künftigen Mathematikunterricht wünschen.

Genau Letzteres führt uns hier zusammen: Lassen Sie uns also darüber nachdenken, welche Zielperspektiven uns hier weshalb vorschweben. Zunächst eröffne ich diesen Reigen mit eigenen Ideen, die ich damit zugleich zur Diskussion stelle.

2 Übersicht

Und zwar sehe ich vor allem folgende Bereiche, die zu *neuen Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts* führen könnten bzw. sogar sollten:

- *Mathematik als Spiel – „homo ludens“*
  - Ausgestaltung von zu erwartenden Freiräumen zu „Spielräumen“
  - Vom „Trivialisierer“ zu *mehr Muße* im Unterricht (*nicht auf Nutzen gerichtet*)
- *Mathematik als Technologie – „homo faber“*
  - Anwendbarkeit der Mathematik (*auf Nutzen gerichtet* – „Nützlichkeitsaspekt“)
  - kritische Reflexion der Anwendbarkeit (Verantwortlichkeit, ethische Fragen)
- Der *Computer als Werkzeug* in der Mathematik
  - Einzug experimenteller Methoden in die Mathematik („Entdecker“)
  - Deduktionssysteme und formales Beweisen („Beweiser“)
- *Grenzen der Anwendbarkeit* von Mathematik
  - Mathematik und Sprache (KI)
  - Mathematik und Logik (Fuzzy Logic)
  - Wissen und Beweisbarkeit (Gödel)
- *Fundamentale Ideen* der Mathematik (und Informatik)
- *Geschichte der Mathematik* als didaktische Leitlinie
  - Begriffsgenese
  - Ideengenese

Die hiermit verbundenen Vorstellungen seien im folgenden skizziert.

3 Vom „Trivialisierer“ zu „mehr Muße“ im Unterricht

Die sog. „Wissenschaftsorientierung“ des Unterrichts, die uns Anfang der siebziger Jahre der Deutsche Bildungsrat beschert hat, führte im Zusammenhang mit der damals (und auch heute in den Rahmenrichtlinien und der Lehrerausbildung z. T. noch immer) vorhandenen „Lernzielorientierung“ zu einer kognitiven Übertonung des Unterrichts (Verkopfung), die als fatal bezeichnet werden muß. Zu dieser Einschätzung passen neuere Überlegungen des Erziehungswissenschaftlers Horst Ruprecht, die er unter Anknüpfung an Ilya Prigogine der Beziehung zwischen Evolution und Pädagogik widmet.

Und zwar weist Ruprecht darauf hin, daß ein wesentliches Merkmal der Evolution in einer permanenten Erhöhung der Komplexität in der Welt gesehen werden könne. Dieses führe dazu, daß nur die höher entwickelten Lebewesen eine spielerische Entwicklungsphase durchlaufen würden. Insbesondere zeige sich, daß sowohl Dauer als auch Intensität des Spiels geradezu ein Charakteristikum für die Höhe der Evolution seien. In diesem Denkmodell Ruprechts erscheint dann der *Mensch „als das am längsten spielende und am meisten des Spielens bedürftige Wesen“.*

Ruprecht leitet hieraus die Forderung ab, daß das Bildungsangebot der Schulen von seinen *„sklerotisierenden Rückständen“* befreit werden müsse, um sich in allen Fächern wieder für die „Spiel-Räume des Denkens“ zu öffnen. Er erinnert dabei nachdrücklich an die ursprüngliche Bedeutung von „Schule“, die im griechischen „scholé“ für „Muße“ zu finden ist. Auch für den Mathematikunterricht entstünden demgemäß besondere Aufgaben: *„Mathematik ist ein grandioses Spiel des Geistes, und als solches müßte sie in den Schulen erscheinen.“*

Folgt man meiner Einschätzung, daß aufgrund der künftigen Verfügbarkeit von „Trivialisierern“ (zumindest in der Gesellschaft; nicht notwendig auch im Unterricht!) klassische, kalkülhafte Bereiche des herkömmlichen Mathematikunterrichts bis hin zur Bedeutungslosigkeit verkümmern, so ergibt sich aufgrund der dann entstehenden „Freiräume“ eine Möglichkeit zu deren Ausgestaltung zu

„Spielräumen" im Sinne Ruprechts und damit zur Realisierung der dringend erforderlichen Muße im Unterricht – dieses zugleich im Sinne einer Öffnung des Unterrichts hin zu schülerorientierter Individualisierung (vgl. etwa die heutigen Allgemeinbildungskonzepte von Klafki und Heymann).

4 Mathematik als Technologie

Die Mathematik entwickelt sich mit steigender Tendenz zu einem unentbehrlichen Werkzeug in Wissenschaft und Gesellschaft. Insbesondere entsteht ein neuer Zweig der Mathematik, der mit dem klassischen, aber bereits belegten Begriff „Angewandte Mathematik" nur unzureichend beschrieben wird. In diesem extrem anwendungsorientierten Zweig gibt es Richtungen mit Bezeichnungen wie „Technomathematik", „Industriemathematik" und „Wissenschaftliches Rechnen", und gemeinsam ist ihnen, daß sie als neue mathematische *Disziplinen „gegen elementare Regeln und Normen der scientific community"* verstoßen, und zwar durch die *„Verwendung heuristischer oder experimenteller Methoden"* (wie es der österreichische Mathematiker und Soziologe Ernst Kotzmann formuliert).

Kotzmann mahnt an, daß die Mathematik damit die Rolle einer Technologie im philosophisch-sozialwissenschaftlichen Sinn übernehme und somit Fragen der Technikfolgenabschätzung (bzw. genauer: der *Technikgestaltung*) in ihre Aktivitäten miteinbeziehen müsse, indem er folgert:

„Dann wird es auch notwendig, in die Technikfolgenabschätzung auch die Abschätzung der Risiken und Folgen mathematischer Aktivitäten miteinzubeziehen. Damit eröffnet sich für die Mathematik die Chance zu einer kritischen Betrachtungsweise, wie sie der Technik und den Naturwissenschaften schon seit längerem von einer breiten Öffentlichkeit entgegengebracht wird."

Mathematiker können sich damit nicht einfach in eine verantwortungsfreie Nische zurückziehen! Entsprechend werden in diesem Sinne Ziele (auch) für einen künftigen Mathematikunterricht zu entwickeln sein. Erste Ansätze hierzu liegen in „allgemeinen Zielen einer informations- und kommunikationstechnologischen Bildung" vor, wie sie z. B. in Niedersachsen im Rahmen des Bildungsprojekts „Neue Technologien und Schule" entwickelt und z. B. im Modellversuch „Ethik und Neue Technologien" für einige Fächer bzw. Themen z. T. bereits konkretisiert wurden.

Es sind also für einen künftigen Mathematikunterricht u. a. auch derartige Ziele zu entwickeln und exemplarisch durch Themen und Inhalte zu konkretisieren, damit die Schülerinnen und Schüler einerseits erleben können, in welcher Weise Mathematik *tatsächlich anwendbar* ist, sie aber auch erfahren, daß die ethische Frage nach der Verantwortlichkeit für die Folgen des eigenen und kollektiven Tuns sich auch und gerade für den Mathematiker stellt.

5 Computer als Werkzeug in der Mathematik

Mit dem Computer liegt für die mathematische Forschung ein neuartiges Werkzeug vor, und zwar für eine experimentelle Mathematik, die es – zumindest in dieser Ausprägung – in der „Vor-Computer-Ära" nicht gab. So kann man über das Spielen mit Formeln und insbesondere mit Algorithmen *mathematische Zusammenhänge heuristisch entdecken* und Theorien in Wechselwirkung mit dem Computerexperiment entwickeln. Beispiele dafür sind etwa die Chaos-Theorie, die Fraktale Geometrie und die Theorie dynamischer Systeme, die seit einiger Zeit vielfach Anlaß auch didaktischer Untersuchungen sind.

Ein künftiger Mathematikunterricht wird solche Aspekte den Schülerinnen und Schülern nicht vorenthalten dürfen, ihnen dazu aber notwendigerweise auch eigene Erfahrungen ermöglichen müssen. Hierzu wird eine entsprechende Ausstattung aus Hard- und Software erforderlich sein, die möglicherweise künftig vorzugsweise aus (ständig verfügbaren) graphikfähigen Taschencomputern (in Kürze auch mit symbolischen Verarbeitungsmöglichkeiten) und wohl weniger aus (nur selten verfügbaren) Tischcomputern bestehen wird.

Ein Unterricht, der diesen Aspekt des „Entdeckers" aufgreift, wird jedoch auch die Möglichkeiten und Grenzen der Erkenntnisgewinnung mittels solcher Werkzeuge zu reflektieren haben, um allgemeinbildenden Ansprüchen genügen zu können. In geeigneter Weise muß den Schülerinnen und Schülern auch vermittelt werden, daß ein mit sog. „künstlicher Intelligenz" ausgestatteter Computer auch als „Beweiser" benutzt werden kann, und zwar für formal-logische Beweise. Hierbei wird eine deutliche Abgrenzung gegenüber der dem Menschen vorbehaltenen Methode des Argumentierens, Begründens und Widerlegens vorzunehmen sein.

6 Grenzen der Anwendbarkeit von Mathematik

6.1 Mathematik und Sprache

Wenn die Mathematik in Bereiche der Realwissenschaften und auch in praktische Wissenschaften Einzug hält und verallgemeinert: wenn Mathematik angewendet wird, so treten Kommunikationsprobleme auf, die nicht nur mit Unterschieden der jeweiligen Fachsprachen, sondern darüber hinaus mit Unterschieden zwischen der formalmathematischen und der natürlichen Sprache zusammenhängen. Man würde heute sagen, die „Schnittstellen“ müssen angepaßt werden. Hierbei zeigen sich aber Grenzen der Mathematisierbarkeit und damit der Anwendbarkeit von Mathematik, und das führt uns zu dem Forschungsgebiet der „Künstlichen Intelligenz“ (KI), die eine typisch technologische Disziplin mit den Aspekten Forschung und Entwicklung ist. Im Rahmen der KI-Forschung erweist sich nämlich die Erforschung der menschlichen, natürlichen Sprache als schwierige Aufgabe. Denn während die Mathematik – wie auch andere Wissenschaften – von der Eindeutigkeit der Begriffe und Aussagen lebt, ist die natürliche Sprache durch Polysemantik gekennzeichnet, weiterhin z. B. durch Vagheit und elliptische Verkürzung.

So wird man also vom Selbstverständnis der Mathematik her in ganz besonderer Weise zu berücksichtigen haben, daß der mathematische Denkstil, der von klarer Begrifflichkeit und zweiwertiger Logik – also dem „tertium non datur“ – geprägt ist, großartige Leistungen zu erbringen vermag, daß es daneben aber auch andere Denkstile gibt, die das Menschsein im ganzen erst ausmachen. Beispielsweise die Dichtung lebt geradezu von den eben genannten Eigenschaften der natürlichen Sprache, denn Dichtung will individuell gedeutet und interpretiert werden („Hermeneutik“). Es geht somit um Achtung des andersartigen Denkstils, und dieses muß auch Schülerinnen und Schülern vermittelt werden!

6.2 Mathematik und Logik („Fuzzy Logic“)

Seit etwa 30 Jahren hat der amerikanische Mathematiker und Informatiker Lotfi Zadeh seine sog. „Fuzzy Logic“ entwickelt, um *„mit der Ungenauigkeit der realen Welt fertig zu werden“.* Er führt hierzu aus, daß diese neuartige Logik ein System bilde, das hinreichend flexibel und ausdrucksreich sei, um einen Rahmen für die Semantik natürlicher Sprachen zu liefern und damit deren Vagheiten zu erfassen. Ich nenne sie daher *Vage Logik*.

Zusammenfassend besteht seine Idee in folgendem: Die Aussagen der natürlichen Sprache und die Informationen über die reale, uns umgebende Welt sind in der Regel vage, ungenau und unscharf. Mit Hilfe der *Vagen Logik*, die sich auf *Vage Mengen*, *Vage Quantoren* und *vage Wahrscheinlichkeiten* stützt, sollen diese Vagheiten formal erfaßt und mittels Schlußfolgerungsregeln zu neuen Informationen verarbeitet werden. Diese Ergebnisinformationen sind naturgemäß ebenfalls vage.

In der Fachpresse wird berichtet, daß diese Vage Logik mittlerweile durch eine ensprechende *Vage Regelungstechnik* („Fuzzy Control“) erfolgreich angewendet wird. Jenseits einer Bewertung dieser Vagen Logik hinsichtlich ihrer Seriosität und Wirtschaftlichkeit ist jedoch in bezug auf Ziele eines künftigen Mathematikunterrichts folgendes festzuhalten: Wir müssen uns bewußt sein, wie einseitig doch die von uns üblicherweise verwendete Logik ist und wie weit sie von der Logik der natürlichen Sprache entfernt ist. Damit können wir uns – und vor allem unsere Schüler! – davor bewahren, die Möglichkeiten des mathematischen Denkstils im Diskurs mit anderen zu überschätzen. Einsicht in die Grenzen führt zugleich zu einer Stärkung der eigenen Möglichkeiten.

6.3 Wissen und Beweisbarkeit

Im Zusammenhang mit der Bewußtmachung der eigenen Grenzen muß noch die – nicht neue – Erkenntnis erwähnt werden, daß der Mathematik als Mittel zur Wahrheitsfindung deutliche Grenzen gesetzt sind. So besagt ja der Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel aus dem Jahre 1931, daß es mathematische Behauptungen gibt, die weder bewiesen noch widerlegt werden können, was bedeutet, daß eine derartige unentscheidbare Behauptung nicht als letzte Aussage irgendeines Beweises erscheinen kann. Daraus folgt, daß sich die Auffassung mathematischer Wahrheit von der Auffassung mathematischer Beweisbarkeit unterscheidet. Die entscheidende erkenntnistheoretische Schlußfolgerung hieraus ist bekanntlich, daß die mathematischen Systeme formalen Denkens nicht stark genug sind, alles zu beweisen, was wahr ist. Das bedeutet nun, daß es ein Wissen gibt, das nicht aus dem formalen Denken resultiert!

Auch diese Grenzen der Anwendbarkeit von Mathematik müßten sich in einem künftigen Mathematikunterricht niederschlagen.

7 Fundamentale Ideen

Da dieses das Leitthema unserer Tagung ist, sei nur folgendes angerissen: Der von mir prognostizierten *Sinnkrise* des Mathematikunterrichts kann wohl nur dadurch erfolgreich begegnet werden, daß energische Anstrengungen zur Formulierung fundamentaler Ideen im Rahmen eines rationalen Diskurses unternommen werden. Hierbei sehe ich die Notwendigkeit der Einbeziehung fundamentaler Ideen auch der Informatik in diesen Diskurs, um dann möglicherweise Ziele eines künftigen Mathematikunterrichts um einen Kern aus fundamentalen Ideen beider Disziplinen (als den gemeinsamen Bezugswissenschaften) zu entwickeln.

Beispielhaft möchte ich den Katalog von Heymann zu fundamentalen Ideen der Mathematik nennen:

- Idee der Zahl
- Idee des Messens
- Idee des funktionalen Zusammenhangs
- Idee des räumlichen Strukturierens
- Idee des Algorithmus
- Idee des mathematischen Modellierens

Dieser hier dargestellte Katalog kann für uns eine Diskussionsgrundlage sein, denn ich vertrete die These:

Fundamentale Ideen einer Disziplin können helfen, allgemeine Ziele eines Unterrichtsfachs diskursiv zu formulieren.

Neben dem Katalog von Heymann für den Mathematikunterricht bieten auch die Verfügbarkeit sowohl informationstechnischer Systeme als auch informatischer Methoden und Ideen – vgl. Schwill – auf sehr unterschiedlichen Ebenen Ansatzpunkte, solche allgemeinen Ziele eines künftigen Mathematikunterrichts zu entwickeln.

Die von mir bisher genannten Bereiche sind in diesem Sinne zu verstehen. Ein weiterer, gar nicht mehr vordergründig mit Computer und Informatik zusammenhängender sei abschließend skizziert:

8 Geschichte der Mathematik als didaktische Leitlinie

Durch ein künftig zu erwartendes Zurücktreten kalkülorientierter Phasen des Mathematikunterrichts werden Freiräume entstehen, die im Sinne der genannten Aspekte unter Einbeziehung fundamentaler Ideen zu füllen sind und diesem Unterricht einen (gegenüber jetzt) stärkeren philosophisch-erkenntnistheoretischen Aspekt verleihen können. Der Mathematikunterricht kann und wird damit wohl schwerer werden. Zur kritischen Reflexion der verwendeten Methoden und Werkzeuge, aber auch zur Würdigung der zweifellos seit Anbeginn spielerischen Aspekte mathematischen Tuns gehört aber notwendig ein Blick in die historische Entwicklung der Begriffe und Ideen.

In diesem Sinn kann „Geschichte der Mathematik“ ein spannender didaktischer Aspekt zur methodischen Gestaltung von Unterricht sein. Und zwar wird durch eine solche „*historische Verankerung*“ eine innermathematische Beziehungshaltigkeit (Freudenthal, Wittmann) unter kulturhistorischem Aspekt erreicht.

Viele Beispiele zur historischen Verankerung sind denkbar, etwa folgende Themen aus dem Bereich der (propädeutischen) Analysis: Entdeckung der Irrationalität am Pentagramm; historisch orientierte Einführung von Grundbegriffen der Analysis wie „Stetigkeit“, „Grenzwert“, „Differenzierbarkeit“ und „Integrierbarkeit“; „Kurve“ (z. B. die Quadratrix); Leibnizsches Differential bei Integrationen (Rotationsvolumen, Bogenlänge); Summe einer geometrischen Reihe nach Torricelli; Figurierte Zahlen, Folgen und Reihen; Mittelwerte, Folgen und Algorithmen; Zahlendreiecke; Approximationsalgorithmen(zurückgehend bis auf den Babylonischen Algorithmus); Kreisquadratur und Winkeldreiteilung mit Hilfe der Archimedischen Spirale (oder der Quadratrix); ...

Dabei geht es dann nicht primär um neue Inhalte, sondern um eine andere Sichtweise geeigneter Themenbereiche.

9 Literaturhinweise

Hischer, Horst: Neue Technologien als Anlaß einer erneuten Standortbestimmung für den Mathematikunterricht. In: *mathematica didactica* **14**(1991)2/3, S. 3-24. (Hierin wird auch der von mir verwendete Technologiebegriff erläutert. Auszugsweise ist diese Abhandlung im Anhang des Tagungsbandes 1992 wiedergegeben. Ferner seien die Tagungsbände 1991, 1992, 1993 des Arbeitskreises genannt.)

Herget, Wilfried: Ziele und Inhalte des Informatikunterrichts – zum Vergleich. In: Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht und Computer – neue Ziele oder Wege zu alten Zielen? Tagungsband. Franzbecker, Hildesheim 1994, S. 28-30.

Hischer, Horst & Scheid, Harald: Grundbegriffe der Analysis – Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1995.

Hischer, Horst: Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt. In: *Mathematik in der Schule* **32**(1994), Teil 1: Heft 4, S.238-248 Teil 2: Heft 5, S. 279-291.

Hischer, Horst: Mittelwerte, Algorithmen und Folgen – ein Beispiel beziehungshaltigen Unterrichts durch „historische Verankerung“. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Tagungsband 1994). Franzbecker, Hildesheim 1994, S. 147-150.