

Horst Hischer, Braunschweig

Mittelwerte, Algorithmen und Folgen – ein Beispiel beziehungshaltigen Unterrichts durch „historische Verankerung“

1 Einleitung

Algorithmen spielen im Mathematikunterricht – im Gegensatz zum Informatikunterricht – eher eine untergeordnete Rolle, obwohl sie zu den mathematischen Urbeständen – insbesondere zu den „*fundamentalen Ideen*“ der Mathematik – gehören. Denn wenn zwar die *Bezeichnung* „Algorithmus“ ihre Wurzeln erst im 9. Jhdt. hat, so hat der *Algorithmus als Verfahren* eine weit längere Tradition, wie wir z. B. an dem rund 2500 Jahre alten „Euklidischen Algorithmus“ zur ggT-Bestimmung sehen, der auch „Wechselwegnahme“ heißt (vgl. [Hischer 1994a]), ferner an dem rund 4500 Jahre alten „Babylonischen Algorithmus“, welcher in astromischen Zusammenhängen der Quadratwurzelapproximation diente, oder an dem archimedischen Algorithmus zur Approximation von π .

Ebenfalls bei den Babyloniern – also vor 4500 Jahren – traten bereits „Mittelwerte“ auf, und zwar im Zusammenhang mit dem von ihnen benutzten Algorithmus, und die Pythagoreer haben später Mittelwerte aus Sicht ihrer Proportionenlehre systematisch untersucht.

Auch den Mittelwerten wird im Mathematikunterricht in der Regel nur wenig Aufmerksamkeit gewidmet, etwa ein *passent* bei dem arithmetischen (und evtl. dem geometrischen) Mittel, in der Geometrie bei dem Mittelpunkt einer Strecke und bei der Winkelhalbierung, weiterhin in der Analysis u. U. bei den Mittelwertsätzen und schließlich auch in der Stochastik – wenn sie denn behandelt wird. Und so spielen Mittelwerte eher eine mittelbare denn eine unmittelbare Rolle im Mathematikunterricht. Dabei gibt es interessante didaktische Vorschläge, mit denen Mittelwerte ins Zentrum des Unterrichts gerückt werden können, so etwa die gerade erschienene Untersuchung von [Jahnke 1993] über das Simpsonsche Paradoxon (vgl. auch den Beitrag von Meyer in diesem Tagungsband) oder das bereits 1985 erschienene Themenheft von *mathematik lehren* über Mittelwerte (vgl. [Herget 1985] und [Winter 1985]). Winter stellt hier Mittelwerte „*als eine grundlegende mathematische Idee*“ heraus – zu Recht, wie ich meine. In diesem Sinn gehören wohl auch Mittelwerte zu den „*fundamentalen Ideen*“ der Mathematik.

Etwas anders verhält es sich dagegen mit den Folgen, die zwar als mathematischer Begriff erst im Zusammenhang mit der Entwicklung der Analysis entstanden sind, inhaltlich jedoch bereits ebenfalls in der Antike auftraten und heute zweifelsfrei zu den fundamentalen Ideen der Mathematik gehören. Folgen spielen nämlich in der Regel im Mathematikunterricht, verglichen mit Mittelwerten und Algorithmen, eine relativ große eigenständige Rolle, und zwar einerseits im Analysisunterricht der Oberstufe – hier zumindest aus praktischen Gründen der Grenzwertberechnung – und andererseits aber auch propädeutisch in den Klassen 9 und 10, etwa bei Intervallschachtelungen. (Allerdings mahnt Weigand in seinem Beitrag in diesem Tagungsband zu Recht eine noch stärkere Berücksichtigung des Folgenbegriffs an.)

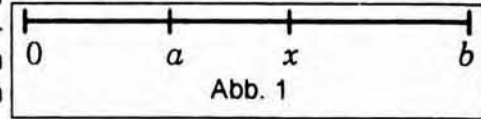
Und hier sehen wir auch sofort Zusammenhänge zu Algorithmen und Mittelwerten, und mein Ziel wird es sein, exemplarisch ein Unterrichtskonzept vorzustellen, mit dem solche Zusammenhänge aufgedeckt werden, um damit eine beziehungsreiche Begegnung mit den Begriffen „Mittelwert“, „Algorithmus“ und „Folge“ unter einem gemeinsamen Blickwinkel zu ermöglichen.

Für diesen gemeinsamen Blickwinkel schlage ich eine *mathemathikhistorische Orientierung* vor, die ich an anderer Stelle „*Historische Verankerung*“ genannt habe. Hierdurch wird eine „innermathematische Beziehungshaltigkeit“ erreicht, die eine Belegung der methodischen Variablen „Verbindung“ von [Vollrath 1976] darstellt (vgl. ausführliche Beschreibung in [Hischer 1994a]; erste Hinweise in [Hischer 1981], detailliertere *fachliche* Ausführungen in [Hischer/Scheid 1982, 1994]; der Vorschlag von H. N. Jahnke in diesem Tagungsband verfolgt dagegen eine andere Intention.)

2 Pythagoreische Mittelwerte

Es wird berichtet, daß Pythagoras von seinem Aufenthalt in Mesopotamien die Kenntnis dreier Mittelwerte mitgebracht habe, welche von den Babyloniern zur Quadratwurzelapproximation benutzt wurden, nämlich das *arithmetische*, das *geometrische* und das *subkonträre Mittel*. Letzteres wurde später vermutlich von einem der jüngeren Pythagoreer, Philolaos († ca. 390 v. Chr.) oder Archytas

von Tarent (* ca. 428 v. Chr.), in „*harmonisches Mittel*“ umbenannt. Diese Mittelwerte wurden von den Pythagoreern im Sinne ihrer Proportionenlehre durch Gleichheiten zwischen Streckenverhältnissen charakterisiert. In heutiger Notation legen wir gemäß Abb. 1 einen Abschnitt der Zahlengeraden zugrunde, für die gesuchten „Mittelwerte“ x gilt dann:



- (1) x ist *arithmetisches Mittel* von a und b $\Leftrightarrow \frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{a}$ (kurz: $x =: A(a, b)$)
- (2) x ist *geometrisches Mittel* von a und b $\Leftrightarrow \frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{x}$ (kurz: $x =: G(a, b)$)
- (3) x ist *harmonisches Mittel* von a und b $\Leftrightarrow \frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{b}$ (kurz: $x =: H(a, b)$)

Als „Lösungen“ dieser drei Proportionen errechnet man leicht

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a, b) = \sqrt{ab}, \quad H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}.$$

Die Entdeckung der „musikalischen Proportion“ $\frac{H(a, b)}{a} = \frac{b}{A(a, b)}$ an schwingenden Saiten führte

dann wohl zur Namensgebung „*harmonisches Mittel*“ (vgl. [Boyer 1968]. Die Pythagoreer charakterisierten in ähnlicher Weise sieben weitere Mittelwerte („*Mediäteten*“; vgl. [Boyer 1968]), indem sie systematisch die Definitionsgleichungen für die babylonischen Mittelwerte variierten:

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{b}{a}, \quad \frac{x-a}{b-x} = \frac{x}{a}, \quad \frac{x-a}{b-x} = \frac{b}{x}, \quad \frac{x-a}{b-a} = \frac{a}{x}, \quad \frac{x-a}{b-a} = \frac{a}{b}, \quad \frac{b-a}{b-x} = \frac{b}{a}, \quad \frac{b-a}{b-x} = \frac{x}{a}$$

Als „sinnvolle Lösungen“ für diese sieben weiteren „Mittelwerte“ ergeben sich der Reihe nach

$$\frac{a^2 + b^2}{a+b}, \quad \frac{b-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + a^2}, \quad -\frac{b-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + b^2}, \quad \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4ab - 3a^2}, \quad b - \frac{(b-a)^2}{b}, \quad a + \frac{(b-a)^2}{b} \text{ und } \max\{b-a, a\}.$$

Theoretisch lassen sich insgesamt 21 derartige Proportionen aufstellen, von denen aber einige wegen der Voraussetzung $a \leq x \leq b$ sinnlos sind. Einige liefern keine neuen Lösungen, und andere liefern „Lösungen“, die identisch a oder identisch b sind und denen damit die Bedeutung eines „Mittelwerts“ gar nicht zugesprochen werden kann. Dennoch gibt es eine elfte Gleichung, welche merkwürdigerweise von den Pythagoreern nicht angegeben wird, obwohl sie eine neue Lösung und damit einen elften Mittelwert liefert, der über Proportionen erklärt ist, nämlich:

$$\frac{b-a}{b-x} = \frac{b}{x} \quad \text{mit der Lösung} \quad \frac{b^2}{2b-a}.$$

3 Der Babylonische Algorithmus

Bei der pythagoreischen Definition der Mittelwerte war $0 < a \leq b$ bzw. sogar $0 < a < b$ vorausgesetzt. Somit müssen auch die linken Seiten der definierenden Gleichungen stets positiv sein, es ist also sogar $a < x < b$, und daher ergibt sich sofort

$$a < H(a, b) < G(a, b) < A(a, b) < b \quad (*)$$

Wegen $A(a, b) - a = \frac{1}{2}(b-a) > 0$ ist $0 < A(a, b) - H(a, b) < \frac{1}{2}(b-a)$, und damit ist durch obige Ungleichungskette ein (abbrechender) Algorithmus gegeben, nämlich der Babylonische Algorithmus zur Quadratwurzelapproximation (Abb. 2; es liegt eine Intervallschachtelung vor).

WÄHLE $c > 0$	
WÄHLE $\varepsilon > 0$	
WÄHLE $a, b > 0$ mit $a < b$ und $ab = c$	
WIEDER- HOLE	$z := H(a, b)$ $b := A(a, b)$ $a := z$
BIS $b - a < \varepsilon$	
AUSGABE $\text{approx}(\sqrt{c}, \varepsilon)$: $A(a, b)$	

Abb. 2

4 Der „Kreis als harmonisch-geometrisches Mittel“

Erste systematische Approximationen der Kreiszahl π verdanken wir bekanntlich Archimedes (287 bis 212 v. Chr.), wengleich uns durch den Papyrus Rhind, den der Schreiber Ahmes verfaßt hat, ägyptische Näherungswerte bekannt sind, die ca. 4000 bis 5000 Jahre alt sind (vgl. [Boyer 1968]). Archimedes verwendete bereits Intervallschachtelungen, indem er – in heutiger Sichtweise – rekursiv definierte Folgen ein- und umbeschriebener n -Ecke betrachtete und der Rekursionsschritt in

der Eckenverdoppelung bestand. Das Verfahren ist bekannt, numerisch aufwendig, und Archimedes vermied bereits – wie ebenfalls bekannt ist – durch geschickte Termumformung das Auftreten einer „Nullkatastrophe“.

Bezeichnen wir den Umfang des einbeschriebenen n -Ecks mit E_n und den des umbeschriebenen n -Ecks mit U_n , so gelten bekanntlich die in Abb. 3 aufgeführten rekursiven Beziehungen.

$$E_{2n} = \frac{2E_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - \left(\frac{E_n}{n}\right)^2}}} > E_n$$

$$U_{2n} = \frac{4U_n}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{U_n}{n}\right)^2}} < U_n$$

Abb. 3

Diese Gleichungen bzw. Ungleichungen lassen sich durch elementargeometrische Betrachtungen an rechtwinkligen Dreiecken herleiten, und sie begründen einen entsprechenden *Algorithmus zur Approximation von 2π* . Man sollte historisch würdigen, daß Archimedes beim Start mit einem Sechseck die Approximation bis zum 96-Eck getrieben hat. Für uns ist es ein Leichtes, mittels eines Computers diesen Algorithmus „beliebig weit“ im Rahmen des numerisch Möglichen abzuarbeiten, jedoch bei Verwendung eines nicht-programmierbaren Taschenrechners entsteht eine spürbare Belastung.

Daher ist es interessant, daß spätestens von James Gregory (1638 bis 1675) folgende elementare Zusammenhänge bewiesen wurden ([Boyer 1968]): $U_{2n} = H(E_n, U_n)$ und $E_{2n} = G(E_n, U_{2n})$ (**)

Der Kreis wird deshalb auch *harmonisch-geometrisches Mittel* dieser beiden Polygonfolgen genannt (vgl. [M. Cantor 1900]).

Diese beiden auf diese Weise rekursiv verschachtelt definierten Folgen liefern einen eleganten Algorithmus zur Approximation von π , der in informatischer, folgenfreier Notation in Abb. 4 dargestellt ist. Er ist strukturell einfacher als der babylonische Algorithmus, konvergiert allerdings nicht so schnell wie dieser, ist andererseits ablaufäquivalent mit dem archimedischen Algorithmus und zugleich numerisch weitaus einfacher zu handhaben als dieser.

$E := 6 ; U := 4 \cdot \sqrt{3}$	
WÄHLE $\varepsilon > 0$	
WIEDER-	$U := H(E, U)$
HOLE	$E := G(E, U)$
BIS $U - E < \varepsilon$	
AUSGABE approx(π, ε):	
$\frac{1}{2} A(E, U)$	

Abb. 4

Wie beim babylonischen Algorithmus ergibt sich auch hier die Konvergenz des Verfahrens und damit das Vorliegen einer Intervallschachtelung $\{[E_n, U_n]\}$ für 2π aus (*).

Die generierenden Beziehungen (**) mit dem harmonischen und geometrischen Mittel lassen sich elementargeometrisch bereits mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen erschließen, sie sind also im Mathematikunterricht von Jahrgang 9 behandelbar. Es ist allerdings historisch anzumerken, daß Gregory die *Flächeninhalte* der ein- und umbeschriebenen Polygone betrachtete, während Archimedes ja *Umfanguntersuchungen* durchführte. Obige Rekursionen gelten aber ebenfalls, wenn mit E_n und U_n die entsprechenden *Flächeninhalte* bezeichnet werden.

(Interessanterweise führte Gregory seine Untersuchungen verallgemeinert an Kegelschnitten durch, indem er ein Segment betrachtete, das durch Ergänzung einer Tangente parallel zu einer Sekante verfeinert strukturiert wurde (vgl. [Baron 1969]). Vollzieht man seine Untersuchungen am Kreis nach, so benötigt man den Satz des Pythagoras, den Strahlensatz und den Katheten- oder Höhensatz. Sie können also ebenfalls mit den Mitteln von Jahrgang 9 geführt werden.

5 Skizze eines Unterrichtsgangs (Jahrgang 11; teilweise auch schon in Kl. 9 bzw. 10)

- Motivierender **Einstieg** über 3 Mitteilungen:

(1) Die *Babylonier* kannten sexagesimale Approximationen für $\sqrt{2}$, z. B. $1 + \frac{25}{60}$.

(2) Die *Babylonier* besaßen dafür bereits ein *Berechnungsverfahren*.

(3) *Pythagoras* brachte von den *Babyloniern* die Kenntnis von drei „Proportionen“ mit, mit denen sog. *Mittelwerte* erklärt waren; dazu historische Hintergründe zum Verständnis der pythagoreischen Proportionenlehre („alles ist Zahl“, vgl. [Hischer/Scheid 1994]).

- **Erarbeitung 1:** Auflösung der Gleichungen nach x , erste Interpretation als „*Mittelwerte*“, Veranschaulichung am Kreis nach Pappos (vgl. [Hischer/Scheid 1994]), Namensgebungen „*arithmetisches Mittel*“, „*geometrisches Mittel*“; Begründung des Namens „*harmonisches Mittel*“ über die „*musikalische Proportion*“ und die „*Harmonie der Würfelzahlen*“ 6, 8, 12: 8 ist „*harmonisches Mittel*“ von 6 und 12; Einführung der Bezeichnungen $A(a,b)$, $G(a,b)$ und $H(a,b)$ als zwei-stellige Funktionen und Ablesen von (*) aus den definierenden Gleichungen für $0 < a < b$.

Erkennen weiterer funktionaler Eigenschaften, z. B. $G(A(a,b), H(a,b)) = G(a,b)$ (***) .

ferner $A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{H(a,b)}$ und $A(ka, kb) = k A(a, b)$, $G(ka, kb) = \dots$, $H(ka, kb) = \dots$

- **Erarbeitung 2:** *Babylonischer Algorithmus* als Anwendung von (*) und (***) , Erkennen der Bedeutung für die Quadratwurzelapproximation, Intervallschachtelungseigenschaft, Bestätigung der babylonischen Sexagesimalapproximation, Formulierung des Algorithmus als Diagramm und Abarbeiten mittels TR oder PC.
- **Erarbeitung 3:** Nach Hinweis auf Existenz von weiteren analog definierten pythagoreischen Mittelwerten deren systematische „Nachentdeckung“; Ansätze zur Untersuchung dieser 10 bzw. 11 Mittelwerte, auch mittels PC (z. B. Abb. 5, mit Spreadsheet).
- **Erarbeitung 4:** *Algorithmus von Gregory*, konkrete Approximation von π .
- **Erarbeitung 5:** Durch „Aufeinanderfolgen“ der Näherungswerte der Algorithmen zum *Folgenbegriff*, „arithmetische Folge“ als eine, bei der jedes Glied bis auf das erste das arithmetische Glied der Nachbarn ist, entspr. „geometrische Folge“ und „harmonische Folge“. Analoge Definition weiterer Folgen mit Hilfe der anderen Mittelwerte („Mittelwertfolgen“) und experimentelle Untersuchung. Erkenntnis: *rekursive Eigenschaft* als wesentlich für IN (Peano), *vollständige Induktion*, Anwendung.
- **Mitteilung und Erarbeitung 6:** Von Punktfiguren der Jungsteinzeit über *figurierte Zahlen* und die *heilige Tetraktys* zu *Summenformeln* und damit zum *Reihenbegriff*, speziell *arithmetische, geometrische und harmonische Reihen als Summenfolgen* der entsprechenden Folgen, damit auch *Summenfolgen zu anderen Mittelwertfolgen*. Über Klassifikation zu den Begriffen *Monotonie, Beschränktheit* und *Konvergenz*.
- **Erarbeitung 7:** Rückbesinnung auf die ersten Algorithmen: Umformulierung des *Babylonischen Algorithmus in Folgeschreibweise*, Entschachtelung und damit Übergang zum *Heronverfahren*. Umformulierung des *Gregory-Algorithmus in Folgeschreibweise*, *Approximationsalgorithmus von Archimedes* und Vergleich mit dem von Gregory. Ggf. Ausweitung der Mittelwertuntersuchungen nach den Vorschlägen von Herget und Jahnke.

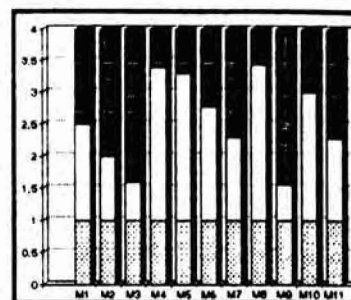


Abb. 5

6 Schluß

Es geht weniger um neue Inhalte als um neue Sichtweisen geeigneter Themenbereiche durch „*historische Verankerung*“. Begünstigt werden solche methodischen Ansätze möglicherweise dadurch, daß künftig aufgrund der Verfügbarkeit informatischer Methoden klassische, kalkülorientierte Unterrichtsphasen an Bedeutung verlieren und somit mehr Muße zur Füllung solcher Freiräume entsteht.

7 Literatur

- Baron, Margaret E.: *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Pergamon Press, Oxford 1969.
- Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, New York 1968.
- Cantor, Moritz: *Geschichte der Mathematik*. Band 2. Teubner, Leipzig 1900.
- Herget, Wilfried: *Zoo der Mittelwerte*. In: *mathematik lehren*, (1985)8, S. 50-51.
- Hischer, Horst: „Historische Verankerung“ als methodische Variante im Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1981, S. 43.
- Hischer, Horst (1994 a): *Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (1): Entdeckung der Irrationalität am Pentagon – ein Beispiel für den Sekundarbereich I*. In: *mathematik in der Schule*, 32(1994)4.
- Hischer, Horst (1994 b): *Geschichte der Mathematik als didaktischer Aspekt (2): Lösung klassischer Probleme mit Hilfe von Trisectrix und Quadratrix – ein Beispiel für den Sekundarbereich II*. In: *mathematik in der Schule*, 32(1994)5.
- Hischer, Horst / Scheid, Harald: *Materialien zum Analysisunterricht*. Herder, Freiburg 1982.
- Hischer, Horst / Scheid, Harald: *Grundbegriffe der Analysis*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994.
- Jahnke, Thomas: *Das Simpsonsche Paradoxon verstehen – ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung*. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 14(1993)3/4, S. 221-242.
- Vollrath, Hans-Joachim: *Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht*. In: *Der Mathematikunterricht* 22(1976)5, S. 7-24.
- Winter, Heinrich (Hrsg.): *Themenheft „Mittelwerte“*. *mathematik lehren*, (1985)8.